

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

**Otimização de seções de concreto armado**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Everaldo Cavalheiro Pinto Junior**

**Florianópolis, Abril de 2006**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**Otimização de seções de concreto armado**

**Everaldo Cavalheiro Pinto Junior**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA  
sendo aprovada em sua forma final.**

---

**Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.**

---

**Jose Antonio Bellini da Cunha Neto, Dr. - Coordenador do Curso**

**Banca Examinadora**

---

**Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D. - Presidente**

---

**Daniel Domingues Loríggio, Ph.D.**

---

**Roberto Dalledone Machado, Dr. Eng.**

*Este trabalho é dedicado  
à minha esposa Raquel,  
e aos meus pais Everaldo e Margarida.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a UFSC e ao POSMEC pela oportunidade de realizar o curso de pós-graduação em engenharia mecânica, que certamente contribuiu muito para minha formação profissional e realização pessoal.

Ao professor Dr. Marcelo, pela orientação e os valiosos conhecimentos transmitidos e, principalmente, pelo exemplo de dedicação à ciência.

Ao laboratório GMAC pela disponibilização dos códigos computacionais de fundamental importância neste trabalho.

Aos professores Dr. Daniel, Dr. Hazim e Dr. Roberto pelas contribuições e incentivo que proporcionaram o aprimoramento da versão final deste trabalho.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo nas horas de estudo, almoço no RU, discussões úteis e inúteis, piadas e tudo mais que uma boa convivência pode proporcionar.

As empresas AM, Brametal, CRT - Brasil Telecom, Claro Digital - RS, Clemar Engenharia, EML Engenharia, Koerich Telecom e Vivo - RS pela confiança em nosso trabalho e incentivo ao aprimoramento constante.

Aos meus amigos pessoais pelo incentivo e companheirismo e a todos que de alguma forma ajudaram a realizar este trabalho.

***Muito Obrigado!!!***

## SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	IV
SUMÁRIO .....	V
LISTA DE FIGURAS.....	VI
SÍMBOLOGIA .....	VIII
RESUMO .....	X
ABSTRACT .....	XI
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	4
2.1 CONCRETO ARMADO .....	4
2.2 PONTES EM CONCRETO ARMADO .....	12
2.3 DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES MÁXIMAS .....	22
2.4 OTIMIZAÇÃO – VISÃO GERAL .....	27
3 DIMENSIONAMENTO DE CONCRETO ARMADO.....	31
3.1 PROJETO ÓTIMO EM CONCRETO ARMADO .....	31
3.2 SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO .....	32
4 ELEMENTOS FINITOS .....	40
5 OTIMIZAÇÃO .....	50
5.1 FORMULÇÃO DA OTIMIZAÇÃO .....	50
5.2 MÉTODOS NUMÉRICOS.....	54
5.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE .....	76
5.4 OTIMIZAÇÃO EM CONCRETO ARMADO.....	84
6 RESULTADOS OBTIDOS .....	88
6.1 DIMENSIONAMENTO A FLEXÃO .....	88
6.2 OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE CONCRETO ARMADO .....	90
6.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA E ENVOLTÓRIAS DE ESFORÇOS .....	93
7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E TÉCNICAS EMPREGADAS .....	104
8 CONCLUSÕES.....	108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	110
APÊNDICES .....	113
APÊNDICE 1 .....	114
RESULTANTE DO CONCRETO PARA SEÇÃO CIRCULAR .....	114

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1.1 – DOMÍNIOS DE ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL – NBR 6118 .....	5
FIGURA 2.1.2A – DIAGRAMA TENSÃO X DEFORMAÇÃO DO CONCRETO (PARÁBOLA - RETÂNGULO) – NBR 6118 .....	6
FIGURA 2.1.2B – DIAGRAMA RETANGULAR DE TENSÃO DO CONCRETO – NBR 6118..	6
FIGURA 2.1.3 – DIAGRAMA TENSÃO X DEFORMAÇÃO PARA O AÇO – NBR 6118 .....	7
FIGURA 2.1.4 – FLEXÃO OBLÍQUA COMPOSTA .....	8
FIGURA 2.1.5 – ZONAS DE SOLICITAÇÃO.....	10
FIGURA 2.2.1 – ELEMENTOS DE UMA PONTE.....	12
FIGURA 2.2.2 – SUPERESTRUTURA DE UMA PONTE .....	13
FIGURA 2.2.3 – SEÇÃO CELULAR DE UMA PONTE.....	13
FIGURA 2.2.4 – PILARES UTILIZADOS EM PONTES.....	14
FIGURA 2.2.5 – CORTINAS E ALAS .....	15
FIGURA 2.2.6 – BLOCOS DE FUNDAÇÃO .....	16
FIGURA 2.2.7 – TREM-TIPO PARA PONTE RODOVIÁRIA CLASSE 45 .....	21
FIGURA 2.3.1 – FLUXOGRAMA PARA OBTER AS BASES DE EFEITOS ELÁSTICOS ....	23
FIGURA 2.3.2 – LINHA DE INFLUÊNCIA .....	24
FIGURA 2.3.3 – SUPERFÍCIES DE INFLUÊNCIA.....	26
FIGURA 2.4.1 – FUNÇÃO UNIMODAL .....	29
FIGURA 3.1.1 – FLUXOGRAMA PARA OTIMIZAÇÃO DAS SEÇÕES DA VIGA PRINCIPAL .....	32
FIGURA 3.2.1 – ESFORÇOS SOLICITANTES .....	34
FIGURA 3.2.2 – ESFORÇOS RESISTENTES.....	34
FIGURA 3.2.3 – FLUXOGRAMA PARA DETERMINAR A ÁREA DE AÇO .....	38
FIGURA 3.2.4 – FLUXOGRAMA DO MÉTODO DA BISSEÇÃO .....	39
FIGURA 4.1 – SÓLIDO GENÉRICO E CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	41
FIGURA 4.2 – CAMPO DE DESLOCAMENTO DA VIGA 2D.....	47
FIGURA 5.1.1 – FLUXOGRAMA PARA PROCESSO GENÉRICO DE OTIMIZAÇÃO .....	53
FIGURA 5.2.1 – FUNÇÃO UNIMODAL .....	58
FIGURA 5.2.2 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO .....	61
FIGURA 5.2.3 – INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO DE PENALIZAÇÃO .....	69
FIGURA 5.2.4 – FLUXOGRAMA PARA O MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO .....	75
FIGURA 5.3.1 – SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO.....	86
FIGURA 6.1.1 – EXEMPLO DE PROCESSO ITERATIVO PARA DETERMINAÇÃO DE $A_s$	90
FIGURA 6.3.1 – VIGA BI-APOIADA COM BALANÇOS .....	93

FIGURA 6.3.2 – LINHA DE INFLUÊNCIA DO MOMENTO PARA A SEÇÃO 9 .....	94
FIGURA 6.3.3 – SEÇÃO TRANSVERSAL DA PONTE .....	95
FIGURA 6.3.4 – LINHA DE INFLUÊNCIA PARA REAÇÃO DE APOIO NA SEÇÃO TRANSVERSAL .....	96
FIGURA 6.3.5 – TREM TIPO REAL SEM IMPACTO .....	97
FIGURA 6.3.6 – TREM TIPO REAL COM IMPACTO .....	98
FIGURA 6.3.6 – ENVOLTÓRIA DE MOMENTO FLETOR .....	99
FIGURA 6.3.7 – SEÇÕES DO TRAMO A SEREM OTIMIZADA .....	100
FIGURA 6.3.8 – SEÇÕES DO BALANÇO E APOIO A SEREM OTIMIZADAS .....	101
FIGURA 6.3.9 – ALTURA DA VIGA OTIMIZADA .....	101
FIGURA 6.3.10 – DETALHAMENTO DA ARMADURA .....	102
FIGURA 6.3.11 – RESULTADOS PARA VIGA OTIMIZADA .....	103
FIGURA 7.1 – FLUXOGRAMA GERAL PARA OTIMIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE UMA PONTE .....	107
FIGURA A.1 – SEÇÃO CIRCULAR DE CONCRETO ARMADO .....	114

## SÍMBOLOGIA

Alfabeto Latino:

$a$	Distância entre momentos nulos em vigas “T”	[cm]
$A$	Área transversal	[cm <sup>2</sup> ]
$A_c$	Área transversal de concreto	[cm <sup>2</sup> ]
$A_{infl}^+$	Área de influência positiva	[cm <sup>2</sup> ]
$A_{infl}^-$	Área de influência negativa	[cm <sup>2</sup> ]
$A_s$	Área de aço	[cm <sup>2</sup> ]
$b_f$	Largura da mesa em seções “T”	[cm]
$b_w$	Largura da seção	[cm]
CAD	<i>Computer Aided Design</i>	
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>	
CG	Centro de gravidade	[cm]
$d^k$	Vetor direção de descida	
$E_{ci}$	Módulo de elasticidade do concreto	[MPa]
$E_{cs}$	Módulo de elasticidade secante do concreto	[MPa]
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço	[MPa]
	Efeito elástico	
ELU	Estado limite último	
ELS	Estado limite de serviço	
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto	[MPa]
$f_{cd}$	Resistência de cálculo do concreto	[MPa]
$f_{yk}$	Resistência característica do aço	[MPa]
$f_{yd}$	Resistência de cálculo do aço	[MPa]
$g$	Carregamento permanente distribuído por unidade de área	[kN/m <sup>2</sup> ]
$I_{xx}$	Momento de Inércia em torno do eixo x	[cm <sup>4</sup> ]
$L$	Comprimento	[cm]
	Vão ou tramo	[cm]
LI	Linha de influência	
$LI_i$	Valor da linha de influência no ponto i	
$M_g$	Momento devido ao carregamento permanente	[kN.m]
$M_q$	Momento devido à carga móvel	[kN.m]
$P$	Carregamento concentrado	[kN]



$q$	Carregamento variável distribuído por unidade de comprimento	[kN/m]
$Res$	Resíduo	
$x$	Variável	
	Profundidade da linha neutra	[cm]
$\mathbf{x}$	Vetor variável de projeto	
$\mathbf{x}^*$	Ponto de mínimo	

#### Alfabeto Grego:

$\varepsilon$	Deformação específica	
$\gamma$	Peso específico	[kN/m <sup>3</sup> ]
$\gamma_c$	Coeficiente de ponderação do concreto armado	
	Peso específico do concreto armado	[kN/m <sup>3</sup> ]
$\gamma_f$	Coeficiente de ponderação das ações	
$\gamma_s$	Coeficiente de ponderação do aço	
	Peso específico do aço	[kN/m <sup>3</sup> ]
$\varphi$	Coeficiente de impacto	
$\rho$	Taxa geométrica de armadura	[%]
$\mu$	Momento reduzido	
$\nu$	Normal reduzida	
$\Omega$	Área de influência	[m <sup>2</sup> /m]
	Região	

#### Índices:

$d$	parâmetro de cálculo (valor alterado por coeficiente de segurança);
$i$	iteração;
$g$	carregamento permanente;
$k$	parâmetro característico (valor sem coeficiente de segurança);
$o$	valores iniciais;
$q$	carregamento variável;

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é a otimização do custo de seções transversais de concreto armado, utilizando um algoritmo de programação matemática. Como aplicação, serão otimizadas as seções transversais da viga principal de uma ponte rodoviária, considerando apenas o momento fletor.

A otimização deve buscar o menor custo, considerando as dimensões das peças, disposições construtivas, resistência dos materiais e esforços solicitantes. Além de respeitar as restrições impostas por normas, processos de fabricação, transporte e montagem.

Foram desenvolvidos algoritmos para dimensionamento de seções transversais em concreto armado de geometria retangular, circular e seção “T”, com carregamento axial e flexão em torno de um eixo. Também foram desenvolvidos códigos computacionais para geração das linhas de influência e envoltória de esforços para uma viga principal de pontes rodoviárias com a superestrutura em viga contínua.

As linhas de influência são obtidas através de uma sequência de soluções e pós-processamento da estrutura com carregamento unitário, utilizando elementos finitos com elementos de viga 2D.

Para otimizar as seções, adotou-se o Método da Penalidade Exterior pela facilidade de implementação em problemas não lineares, como é o caso de uma seção de concreto armado.

## ABSTRACT

The aim of this dissertation is the optimization of the cross section in reinforced concrete beams employing mathematical programming algorithms. As an application, one will optimize the cross section of the main beam of a bridge, considering bending moment only.

The optimization process aims at finding the smallest material cost, by considering the structures dimension, layout, strength of the materials and the applied loads. Besides, it must be in accordance with the design norms, fabrication process, transportation limitations and building procedures.

Algorithms for dimensionality of cross section of reinforced concrete to rectangular, circle and “T” section, with axial and bending loading, were developed. Also, was implemented, computational code for influence lines and involved generation of loading for a main beam of a bridge with the superstructure in continuous beam.

The influence lines are obtained through of sequential solutions and pos-processing of structure under unit loading, employing finite elements with 2D element beam.

To optimization of sections, Method of External Penalty was employing by facilities of implement for nonlinear problems, like is the case of cross section of reinforced concrete.

## CAPÍTULO 1

### 1 INTRODUÇÃO

Otimizar é uma busca constante em todas as ciências. A engenharia sempre buscou soluções ótimas nas mais diversas áreas do conhecimento, o menor custo para atender uma determinada função, a menor massa, o menor tempo de execução, o máximo desempenho e também a combinação entre dois ou mais objetivos como: mínimo de massa com o menor tempo de execução. O mercado competitivo exige soluções concretas de desempenho com baixo custo, sendo a meta deste trabalho, contribuir cientificamente para encontrar a solução ótima no dimensionamento das seções de concreto armado.

A solução ótima para engenharia pode ser pesquisada de diversas formas dentre as quais se destacam: experiências anteriores, comparação entre várias simulações, ensaios de tipo e a utilização de ferramentas matemáticas que serão abordadas em destaque neste trabalho. Assim, será necessário “traduzir matematicamente” o problema físico a ser estudado, ou seja, os objetivos a serem alcançados juntamente com as restrições inerentes ao problema devem ser representados em forma de equações.

A motivação deste trabalho foi o projeto de pontes. A escolha deste tema se deve a situação atual do país, onde o setor de transporte necessita de investimentos imediatos para promover o desenvolvimento. A grande maioria dos clientes de pontes são órgãos públicos: governos federais, estaduais e municipais.

Existem diversos tipos de pontes e, mesmo os modelos mais simples, envolvem uma série de modelos matemáticos tanto para os componentes como para os carregamentos atuantes. O projeto ótimo deve contemplar todos os componentes da ponte e também a interação que ocorre entre eles, por exemplo: para uma ponte de concreto armado em viga contínua, se aumentar o número de apoios, as vigas poderão ter menor inércia, por outro lado será necessário executar mais fundações e pilares. O menor custo da obra dependerá de vários fatores como: custo dos materiais, custo da mão-de-obra, disponibilidade de equipamentos e principalmente os trechos a serem interligados com a ponte.

Uma etapa importante no projeto de pontes de concreto armado é o dimensionamento da seção transversal. Trata-se de um problema não linear. Na prática, este dimensionamento é basicamente realizado de duas formas: ábacos de iteração ou *softwares* comerciais. Poucos engenheiros civis desenvolvem códigos próprios para dimensionamento das estruturas de concreto armado, mais difícil ainda é encontrar códigos de otimização para problemas na área de concreto.

Quando o assunto são pontes, a situação não é diferente dos projetos de concreto. Atualmente, a maioria dos projetos de pontes no Brasil, é idealizada de maneira intuitiva por engenheiros experientes que estabelecem um anteprojeto inicial baseado em projetos semelhantes já consagrados na prática. Considerando o Estado Limite Último (ELU) e o Estado Limite de Serviço (ELS), verificam-se os requisitos de resistência, deformações e outros critérios previstos em normas. Assim, realizam-se alterações locais onde os critérios não foram atendidos ou estão com a margem de segurança elevada, para então chegar ao projeto definitivo. O projeto ótimo pode ser obtido com várias tentativas, mas geralmente o tempo disponível não permite realizar muitas simulações.

Este trabalho propõe otimizar o custo de seções transversais de concreto armado submetidas a flexão composta normal, para aplicações em estruturas de concreto armado em geral. Como a motivação do trabalho foi o projeto de pontes, também foi desenvolvido um código computacional para geração de linhas de influência e envoltórias de momento fletor para vigas contínuas 2D em pontes rodoviárias. A seção transversal é otimizada para o valor do momento obtido através da envoltória.

Não se pode dizer que a viga foi plenamente otimizada, uma vez que as seções transversais foram otimizadas isoladamente e apenas para o valor do momento. Para simplificar o problema, foram desconsiderados o cisalhamento e a torção, embora seus efeitos devam ser considerados, principalmente nas vigas de ponte. Apesar das simplificações adotadas, os princípios empregados neste trabalho poderão ser estendidos em trabalhos futuros para otimizar um número maior de componentes e até mesmo o projeto completo de uma ponte.

A contribuição deste trabalho, ainda que de forma inicial, está em uma abordagem mais científica na busca do projeto ótimo em estruturas de concreto armado. Também tem a intenção de demonstrar que o desenvolvimento de códigos computacionais é uma alternativa viável e bastante eficaz nos problemas práticos de engenharia.

Apesar da aplicação em um projeto específico, os conceitos empregados são gerais e podem ser implementados em outros projetos semelhantes onde as hipóteses da Mecânica do Contínuo são válidas.

O Capítulo 2 apresenta as referências para o dimensionamento de seções de concreto armado, das definições do projeto de ponte, carregamentos atuantes, métodos para determinar os esforços máximos e os princípios básicos de otimização.

No Capítulo 3 está a formulação utilizada para resolver uma seção de concreto armado submetida a solicitações normais.

No Capítulo 4 são apresentados os fundamentos do Método dos Elementos Finitos e a formulação para o elemento de viga utilizado neste trabalho.

O Capítulo 5 apresenta a formulação para otimização e os métodos para programação matemática dos problemas de otimização.

O Capítulo 6 mostra os resultados obtidos comparando com valores apresentados na bibliografia. No Capítulo 7 faz-se a discussão dos resultados para verificar sua validade e quais as possibilidades de extensão do trabalho. Por último, o Capítulo 8 apresenta a conclusão final do trabalho.

## CAPÍTULO 2

### 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

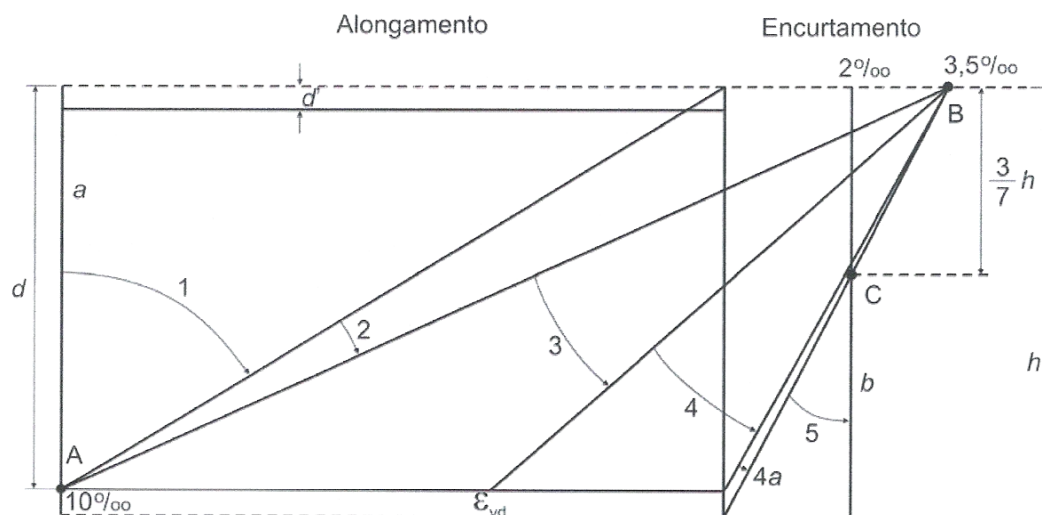
#### 2.1 CONCRETO ARMADO

O concreto armado é um dos materiais mais utilizados no mundo, sendo composto basicamente por dois materiais: aço e concreto, com propriedades químicas e mecânicas diferentes. A NBR 6118 [2004] traz uma série de definições e procedimentos para o dimensionamento do concreto tanto em solicitações normais como para solicitações tangenciais. A norma descreve os princípios gerais para análise estrutural em concreto armado, contemplando:

- Análise linear;
- Análise linear com redistribuição;
- Análise plástica;
- Análise não-linear e análise através de modelos físicos.

Este trabalho aborda o dimensionamento de elementos lineares sujeitos a solicitações normais, considerando que a estrutura será resolvida por análise linear elástica sem redistribuição dos esforços. A NBR 6118 [2004] assume algumas hipóteses básicas:

- a) as seções transversais permanecem planas após a deformação;
- b) as deformações nas barras de aço em tração ou compressão devem ser as mesmas do concreto em seu entorno;
- c) as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, podem ser desprezadas, obrigatoriamente no ELU;
- d) a distribuição das tensões no concreto se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Figura (2.1.2a), com tensão de pico igual a  $0,85f_{cd}$  ou pelo diagrama retangular da Figura (2.1.2b);
- e) a tensão nas armaduras deve ser obtida a partir do diagrama tensão x deformação da Figura (2.1.3);
- f) o Estados Limite Último (ELU) é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios de deformação da Figura (2.1.1).



**Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:**

- reta  $a$ : tração uniforme;
- domínio 1: tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c < 3,5\text{‰}$  e com o máximo alongamento permitido);

**Ruptura convencional por encurtamento limite do concreto:**

- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ );
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ );
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- reta b: compressão uniforme.

Figura 2.1.1 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal – NBR 6118

O concreto tem a característica de resistir no ELU apenas à compressão (hipótese c), e a Figura (2.1.2a) mostra o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  para o concreto composto por uma parábola e retângulo, sempre que possível, deve-se adotar este diagrama para determinar a força resultante das tensões do concreto. Entretanto, se a seção não for retangular, pode ser difícil integrar analiticamente a região comprimida, e seria necessário calcular a integral por métodos numéricos. Como simplificação, a NBR 6118 admite um diagrama retangular com altura equivalente a 80% da distância da face comprimida à linha neutra ( $0,8x$ ), onde a tensão tem valor constante de  $0,85f_{cd}$  no caso da largura da seção, medida paralelamente a linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida e  $0,8f_{cd}$  no caso contrário, conforme ilustra a Figura (2.1.2b). O diagrama retangular facilita sobremaneira o cálculo da integral para determinar a área e o centróide da região comprimida.

Dependendo da complexidade da seção transversal, mesmo adotando o diagrama retangular para as tensões do concreto, será necessário utilizar integral numérica para determinar a área e o centróide da região comprimida.



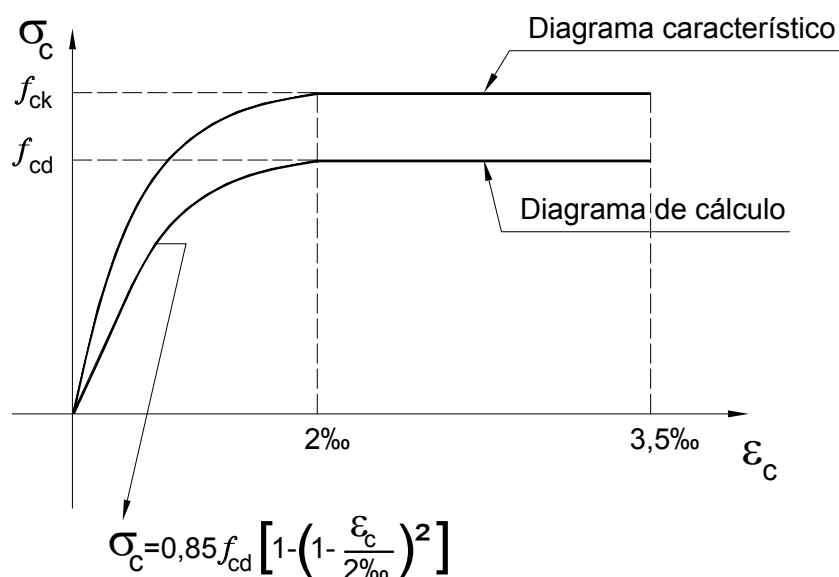


Figura 2.1.2a - Diagrama tensão x deformação do concreto (parábola-retângulo)–NBR 6118

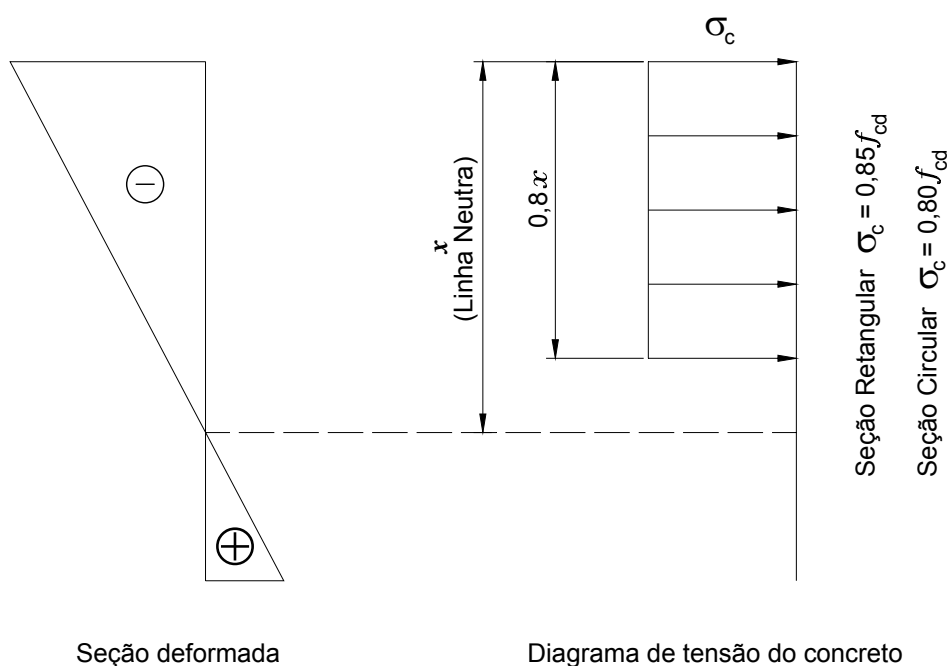


Figura 2.1.2b – Diagrama retangular de tensão do concreto – NBR 6118

O módulo de elasticidade do concreto ( $E_{ci}$ ) deve ser obtido, preferencialmente, através de ensaio. Entretanto, segundo a NBR 6118 [2004], pode-se estimar o valor do  $E_{ci}$  pela Expressão (2.1.1):

$$E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.1.1)$$

Nas análises elásticas de projeto, para determinação dos esforços solicitantes e verificação dos estados limite de serviço, deve-se utilizar o módulo de elasticidade secante definido pela Expressão (2.1.2):

$$E_{cs} = 0,85E_{ci} \quad (2.1.2)$$

A NBR 6118 [2004] prescreve um único diagrama simplificado para aços com ou sem patamar de escoamento, sendo o clássico diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  definido por um trecho linear elástico e patamar de escoamento (elasto-plástico ideal), conforme a Figura (2.1.3).

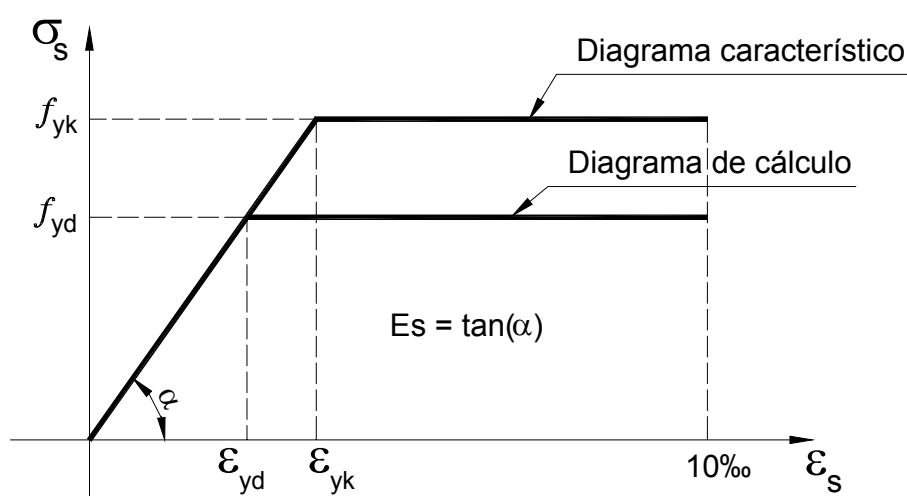


Figura 2.1.3 – Diagrama tensão x deformação para o aço – NBR 6118

Para dimensionamento de uma seção de concreto armado, submetida a solicitações normais, é necessário fixar algumas variáveis como a disposição parametrizada da armadura em relação à seção transversal, dimensões da seção e  $f_{ck}$ . A solução do problema é obtida através de métodos iterativos computacionais ou de ábacos de dimensionamento.

FUSCO [1986] apresenta o caso geral de flexão oblíqua composta, entretanto, a solução é apresentada na forma de diagramas de iteração com valores pré-fixados do esforço normal. Esta bibliografia também aborda isoladamente os casos de seções retangulares submetidas à flexão simples, composta e seções “T”.

O autor apresenta alguns exemplos calculados passo a passo, mas a prioridade está na dedução e utilização de superfícies e diagramas de iteração onde os valores das solicitações, normal e momento, são transformados em valores adimensionais conhecidos como normal reduzida  $\nu$  e momento reduzido  $\mu$ . Com a popularização dos computadores

digitais, as soluções por meio de diagramas e tabelas perderam o sentido, mas os conceitos e deduções apresentados nesta bibliografia são muito úteis para compreensão do problema e podem ser estendidos para a elaboração de códigos computacionais.

Conforme Figura (2.1.4), têm-se os seguintes elementos para a solução exata do problema.

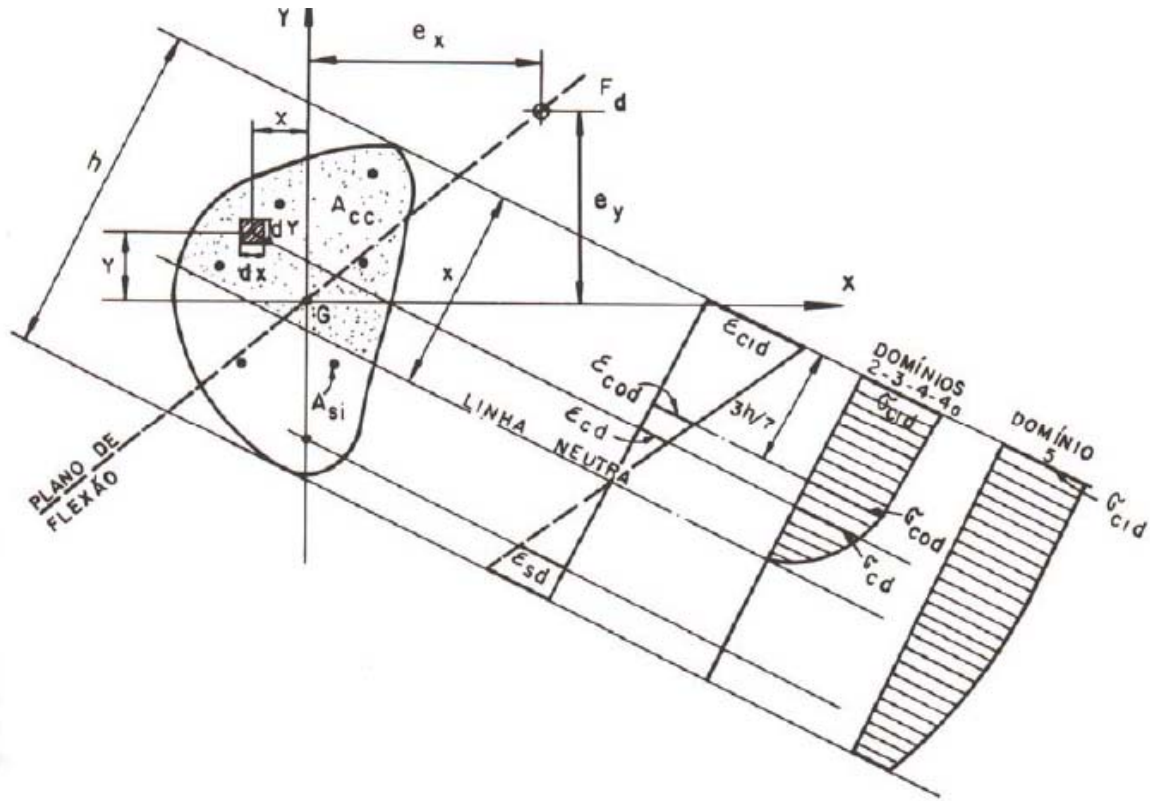


Figura 2.1.4 – Flexão oblíqua composta – FUSCO

a. Condições de equilíbrio

$$N_d = F_d = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sid} \quad (2.1.3a)$$

$$M_{xd} = F_d \cdot e_x = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} X \cdot dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sid} X_{si} \quad (2.1.3b)$$

$$M_{yd} = F_d \cdot e_y = \iint_{A_{cc}} \sigma_{cd} Y \cdot dX dY + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sid} Y_{si} \quad (2.1.3c)$$

b. Condições de compatibilidade

As condições de compatibilidade são decorrentes da manutenção da forma plana da seção transversal.

Dada a posição da linha neutra e imposta a deformação específica de um ponto particular da seção transversal, ficam determinadas as deformações específicas de todos os outros pontos da seção e, conseqüentemente, as respectivas tensões.

### c. Solução do problema

O problema é iterativo, para uma dada seção transversal, escolhida a inclinação da linha neutra e fixada a profundidade  $x$  da zona comprimida, impondo-se o valor de  $\varepsilon_{sd} = 10\text{‰}$  no domínio 2, o valor de  $\varepsilon_{c1d} = 3,5\text{‰}$  nos domínios 3, 4 e 4a e o valor de  $\varepsilon_{c0d} = 2\text{‰}$  no domínio 5, podem ser calculadas todas as tensões.

As equações de equilíbrio fornecem então os valores dos esforços solicitantes correspondentes  $N_d$ ,  $M_{xd}$  e  $M_{yd}$ .

SANTOS [1983] também aborda o problema de dimensionamento com a preocupação em deduzir e apresentar ábacos de iteração, elaborados a partir de grandezas adimensionais. O autor deduz uma série de equações para seções retangulares submetidas a flexão normal composta, com as armaduras posicionadas nas faces superior e inferior da seção transversal.

Definindo normal reduzida como:

$$\nu = \frac{N_d}{\sigma_{cd} b d} \quad (2.1.4)$$

E momento reduzido como:

$$\mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} b d^2} \quad (2.1.5)$$

Colocando os valores de  $\nu$  como abscissas e  $\mu$  (considerado sempre positivo) como ordenadas, poderá o semi-plano formado pelo conjunto de pontos  $(\nu, \mu)$  ser dividido em seis regiões ou zonas de solicitação, conforme Figura (2.1.5). Há cinco zonas na flexo-compressão e apenas três na flexo-tração.

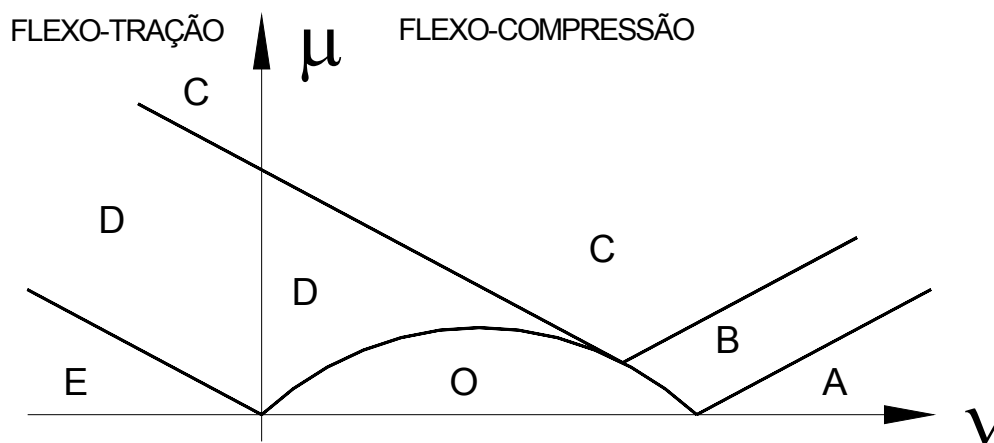


Figura 2.1.5 – Zonas de Solicitação – SANTOS

- Zona A – o par  $(v, \mu)$  acarreta compressão em ambas as armaduras;
- Zona B – crescendo o momento, a armadura em uma das faces pode deixar de existir, conseguindo-se o equilíbrio de  $N_d$  excêntrico apenas com esforços resistentes de compressão (no concreto e na armadura da outra face);
- Zona C – a armadura é tracionada em uma face e comprimida na outra face da seção transversal;
- Zona D – o esforço resistente de compressão é fornecido apenas pelo concreto;
- Zona O – a seção foi superdimensionada: nenhuma armadura é necessária teoricamente;
- Zona E – ambas as armaduras são tracionadas.

SÜSSEKIND [1987] apresenta outra formulação do problema. Seja a seção transversal da Figura (2.1.4) com o esforço normal atuante  $N_d$  no ponto C de coordenadas  $(e_x, e_y)$ , denominado centro de ataque. O dimensionamento é realizado no estado-limite último, processado em regime de plastificação (tanto o concreto como o aço) e, portanto, inviável o emprego do princípio de superposição de efeitos, o problema conjunto tem que ser enfrentado iterativamente.

Face às hipóteses básicas de funcionamento das peças fletidas, o dimensionamento do concreto e armadura será através da verificação de uma seção com armadura arbitrada. Através de tentativas (processo iterativo), determinam-se a posição e inclinação da linha neutra que satisfaça as três condições obrigatórias:

1. A reta que une os pontos de aplicação das resultantes de compressão e tração deve conter o centro de ataque C, isto é, o momento resistente da

seção tem que possuir mesma direção vetorial que a do momento atuante no ELU;

2. A somatória das forças tem que ser igual a zero;
3. O valor do momento resistente, que só depende da posição arbitrada para a linha neutra, bem como da seção de concreto e da armadura, deve ser igual ou superior ao valor de cálculo do momento atuante. Em termos geométricos, isto quer dizer que a posição  $C'$  da resultante das forças resistentes no concreto e aço deve ser tal que coincida com  $C$ , ou dele se afaste em direção oposta àquela do eixo da peça.

Teoricamente, a situação ideal será quando o ponto  $C$  coincidir com  $C'$ , ou seja, os esforços resistentes são exatamente iguais aos esforços solicitantes. Caso o ponto  $C'$  esteja acima do ponto  $C$ , a seção está a favor da segurança. Se  $C'$  estiver entre o ponto  $C$  e a linha neutra, a seção está sub-dimensionada e, para atender aos critérios de segurança, deve ser adotada uma das três alternativas:

1. Incrementar a área de aço;
2. Incrementar a área de concreto;
3. Alterar o arranjo da armadura.

Dependo do caso, será necessária uma combinação entre as alternativas ou até mesmo adotar todas as três simultaneamente para equilibrar os esforços solicitantes.

## 2.2 PONTES EM CONCRETO ARMADO

### 2.2.1 Elementos componentes das pontes

Existem diversos tipos de pontes, como exemplo: viga contínua, estaiada, pênsil, viga em arco. Também podem ser construídas com diversos materiais como concreto armado, concreto protendido, aço, madeira, ou com a combinação destes materiais. Assim como, os componentes de uma ponte dependem do tipo de estrutura, este trabalho apresenta como exemplo pontes de vigas contínuas em concreto armado.

MASON [1977] apresenta de forma global, a subdivisão da ponte em seus elementos. Distingui-se a superestrutura, meso-estrutura, a infra-estrutura e as fundações, ilustrados na Figura (2.2.1):

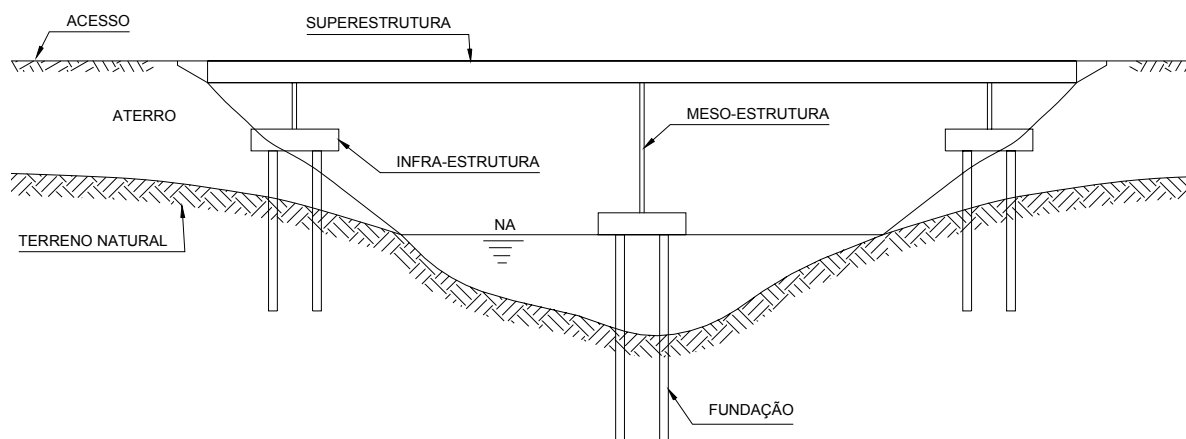


Figura – 2.2.1 Elementos de uma ponte - MASON

A superestrutura recebe diretamente as cargas do tráfego, transmitindo-as à meso-estrutura, que é constituída pelo corpo dos pilares, aparelhos de apoio, cortinas ou encontros. A infra-estrutura compreende os elementos de transmissão dos esforços da meso-estrutura às fundações, tais como os blocos de fundação.

Pode-se ainda subdividir a superestrutura em tabuleiro que corresponde à pista de rolamento, vigamento principal e secundária, sendo este vigamento responsável em receber as cargas do tabuleiro e transmiti-las à meso-estrutura, como mostra a Figura (2.2.2).

O tabuleiro das pontes é constituído de lajes (placas de concreto) ligadas de maneiras diversas aos demais elementos da superestrutura, de acordo com a solução adotada.

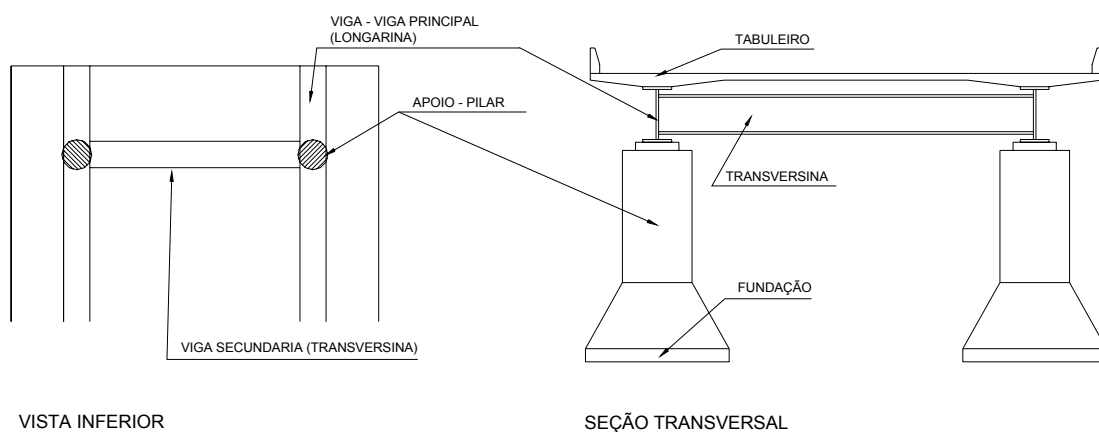


Figura 2.2.2 – Superestrutura de uma ponte

As vigas principais também são denominadas por longarinas e as transversais, por transversinas, e todas podem ser de concreto armado, protendido ou aço. Em certos tipos de pontes com seção celular, não se verifica a divisão de elementos da superestrutura como mencionado anteriormente. O tabuleiro e o sistema principal de vigas funcionam de forma integrada, conforme sugere a Figura (2.2.3).

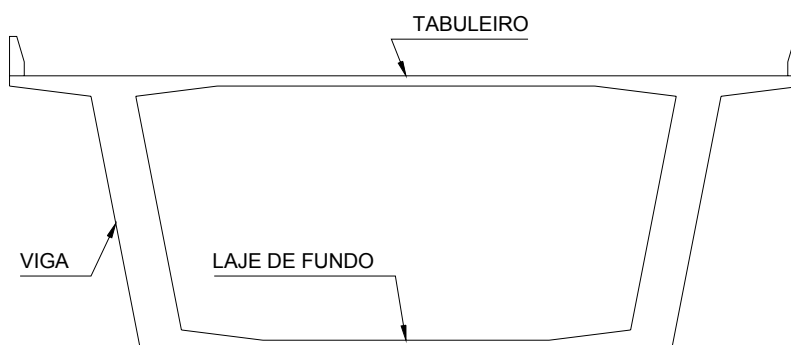


Figura 2.2.3 – Seção celular de uma ponte

Na maioria das pontes são utilizados aparelhos de apoio para transmitir as cargas da superestrutura aos pilares ou encontros. Os aparelhos de apoio podem permitir ou impedir movimentos de translação e rotação de acordo com a natureza da obra ou do projeto. A disposição dos aparelhos de apoio deve ser tal que garanta a fixação da superestrutura e ao mesmo tempo permita movimentos devidos aos efeitos térmicos e de retração, impedindo porém os movimentos devidos à frenagem e à força do vento. Os aparelhos de apoio podem ser de concreto, aço ou de borracha fretada (neoprene com chapa metálica) que atualmente são os mais utilizados.

Meso-estrutura e infra-estrutura das pontes compreendem dos pilares, encontros, blocos de fundação, aparelhos de apoio, e demais elementos destinados a transmitir cargas às fundações. Por vezes meso e infra-estrutura não apresentam separação distinta.



Os pilares das pontes abrangem as soluções de pilar único ou pilares independentes, de acordo com o tipo de superestrutura e a altura dos pilares. A Figura (2.2.4a) mostra pilares separados, podendo ser adotado para pilares de pequena e média altura, enquanto a Figura (2.2.4b) representa uma solução em pilar único, de seção celular variável nos sentidos longitudinal e transversal. Esta solução é conveniente para pilares de grande altura que devem possuir inércia elevada para garantir a estabilidade e resistência aos esforços. Outra solução possível para vigas múltiplas é em pórtico constituído por pilares e vigas como indica a Figura (2.2.4c). Também pode ser utilizada uma solução nas quais os tubulões da fundação servem diretamente como pilares conforme mostra a Figura (2.2.2).

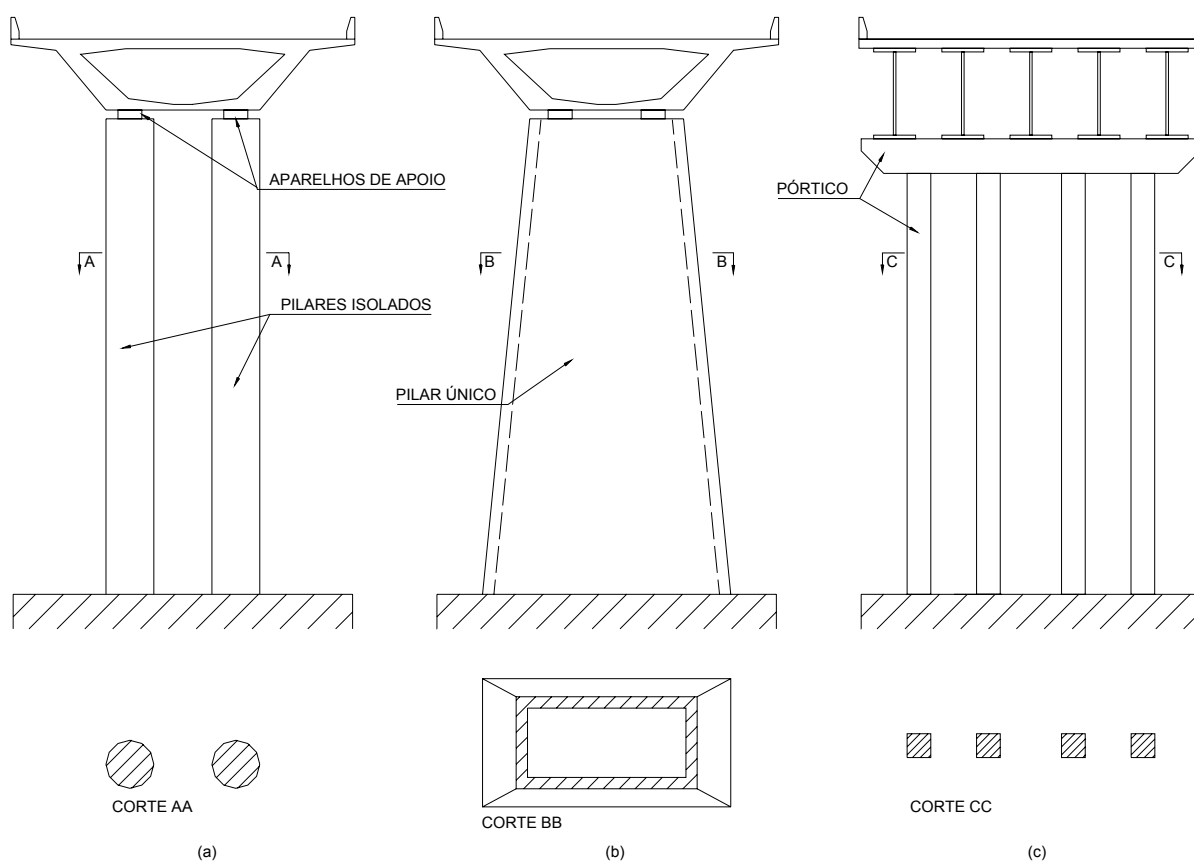


Figura 2.2.4 – Pilares utilizados em pontes

Os encontros ou estruturas de transição permitem integrar a obra-de-arte com o restante da estrada ou ferrovia, estão localizados nos extremos das pontes e devem garantir a estabilidade do aterro de acesso. Em pontes rodoviárias é comum suprimir os encontros por cortinas e alas, ilustrados na Figura (2.2.5), as quais são projetadas em balanços da superestrutura nos vãos extremos e devem ser previstos taludes adequados para os aterros de acesso. Deve-se observar o nível de máxima enchente para garantir a estabilidade do talude durante toda a vida útil da estrutura.

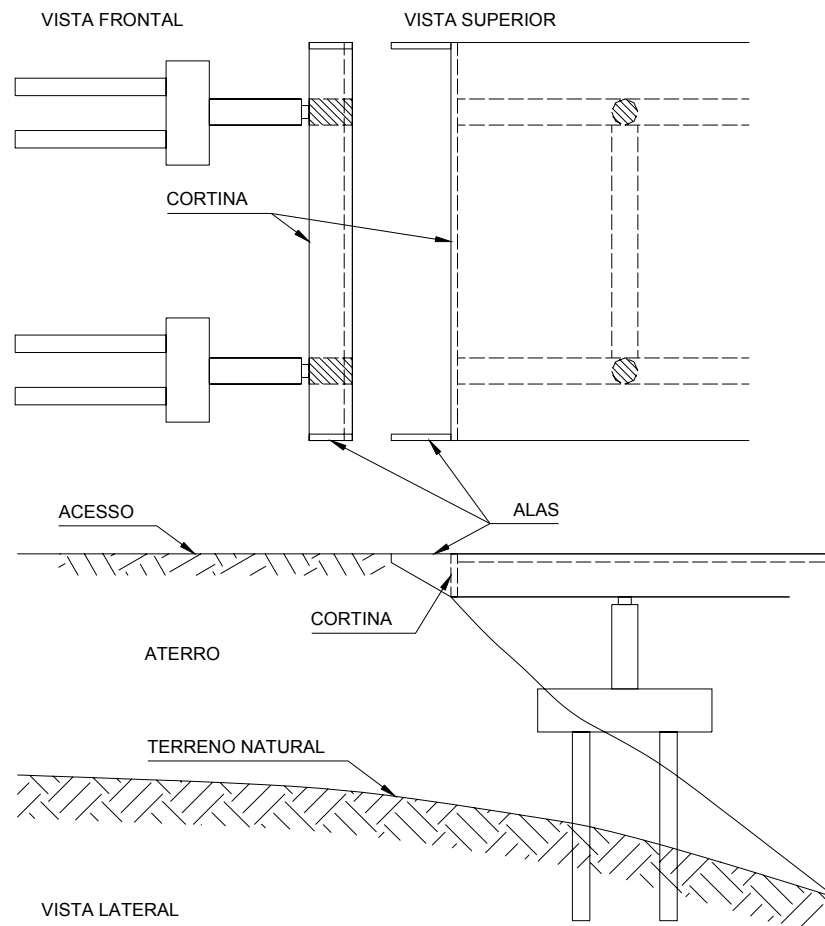


Figura 2.2.5 – Cortinas e alas

Para transmitir as cargas dos pilares às fundações em estacas ou tubulões, são empregados blocos de fundação. Geralmente os pilares de pontes possuem blocos com número par de estacas ou tubulões e dois eixos de simetria, como indicam a Figura (2.2.6a). Os blocos de fundação são estruturas de grande rigidez capazes de desenvolver o mecanismo conhecido como bielas comprimidas de concreto e tirante formados pelas armaduras, ilustrados na Figura (2.2.6b). A tendência de formação das bielas é a do caminho mais curto entre o pilar até os tubulões ou estacas.

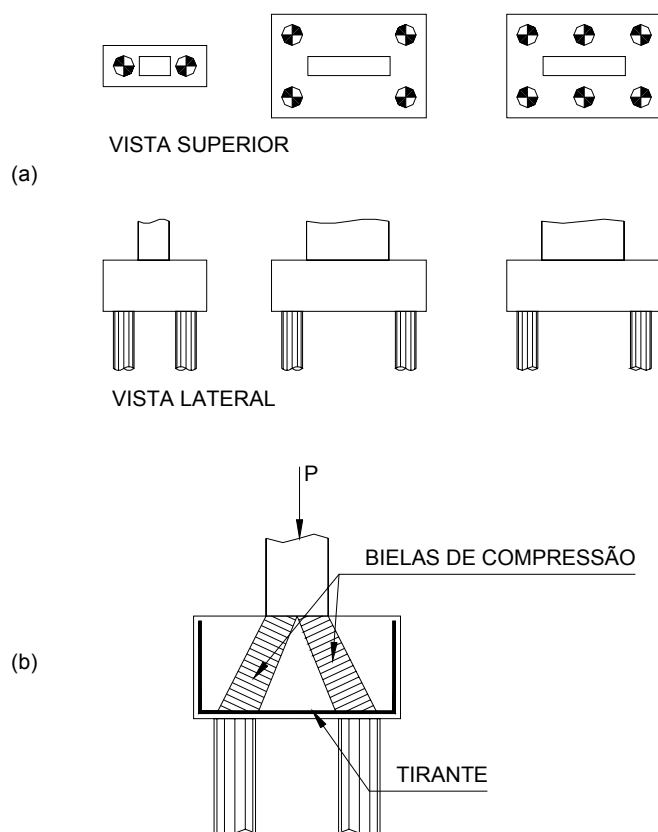


Figura 2.2.6 – Blocos de fundação

As fundações em pontes são projetadas para resistirem a grandes esforços verticais e horizontais. Em função da lâmina de água e características geotécnicas do local, podem ser indicados tipos de fundações profundas (estacas ou tubulões), superficiais (sapatas ou tubulões curtos) ou especiais. De modo geral, em terrenos de boa qualidade e lâminas de água pouco espessas, adota-se fundações superficiais e nos terrenos com pouca resistência utiliza-se fundações profundas.

Fundações superficiais são aquelas implantadas a pequena profundidade. Normalmente é o caso de sapatas diretas e tubulões curtos, onde a carga é transmitida diretamente ao solo através da base.

DÉCOURT [1998] classifica as estacas em duas categorias: estacas de deslocamento e estacas escavadas. As estacas de deslocamento são aquelas introduzidas no terreno através de algum processo sem a retirada de solo. Como exemplos, citam-se as estacas pré-moldadas de concreto, metálicas, de madeira e as estacas de concreto fundido no terreno. Estacas escavadas são aquelas executadas *in loco* através da perfuração do terreno com remoção do material. Nesta categoria se enquadram as estacas tipo broca, *Strauss*, barretes, os estacões, as hélices contínuas e estacas injetadas. Uma estaca submetida a um carregamento irá resistir pela resistência ao cisalhamento gerada ao longo do fuste e pela distribuição de tensão normal gerada ao nível de sua ponta.

ALBIERO & CINTRA [1998] tratam o tubulão como estacas escavadas de grande diâmetro, com ou sem alargamento da base. Os tubulões podem ser a céu aberto com ou sem contenção lateral ou pneumática, quando se emprega ar comprimido com pressão equivalente à pressão de água intersticial. Atualmente os tubulões pneumáticos são pouco empregados no mundo devido aos riscos e custos envolvidos. No Brasil também existe a tendência em reduzir sua utilização.

### 2.2.2 Ações e carregamentos

Os valores característicos  $F_k$  das ações são estabelecidos em função da variabilidade de suas intensidades.

Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura, levando-se em conta os possíveis estados limites últimos e os de serviço NBR 6118 [2004]. As ações são classificadas em:

- Permanentes: ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida útil da estrutura, os valores característicos devem ser adotados iguais aos valores médios das respectivas distribuições de probabilidade;
- Variáveis: podem ser diretas que são as cargas acidentais, vento e água, ou indiretas como variações de temperatura, choques e vibrações;
- Excepcionais: situações excepcionais de carregamento cujos efeitos não possam ser controlados por outros meios.

Os valores de cálculo  $F_d$  das ações são obtidos a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$ . Os valores representativos podem ser:

- a) os valores característicos;
- b) valores convencionais excepcionais;
- c) valores reduzidos, em função da combinação de ações.

As ações devem ser majoradas pelo coeficiente  $\gamma_f$ , cujos valores estão nas Tabelas (2.2.1 e 2.2.2).

Tabela (2.2.1) – Valores do coeficiente  $\gamma_f = \gamma_{f1} \gamma_{f3}$  – NBR 6118

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 <sup>1)</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

Onde:  
D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.  
<sup>1)</sup> Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Tabela (2.2.2) – Valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$  – NBR 6118

Ações		$\gamma_{f2}$		
		$\psi_0$	$\psi_1$ <sup>1)</sup>	$\psi_2$
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>2)</sup>	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>3)</sup>	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

<sup>1)</sup> Para os valores de  $\psi_1$  relativos às pontes e principalmente aos problemas de fadiga, ver seção 23.  
<sup>2)</sup> Edifícios residenciais.  
<sup>3)</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

Um carregamento é definido pela combinação das ações, que deve ser feita de forma que possam ser determinados todos os efeitos mais desfavoráveis na estrutura. A verificação da segurança em relação aos estados limites últimos e os de serviço deve ser realizada em função de combinações últimas e de combinações de serviço, respectivamente. As combinações estão dispostas na Tabela (2.2.3).

Tabela (2.2.3) – Combinações últimas – NBR 6118

Combinações últimas (ELU)	Descrição	Cálculo das solicitações
Normais	Esgotamento da capacidade resistente para elementos estruturais de concreto armado <sup>1)</sup>	$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk}) + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
	Esgotamento da capacidade resistente para elementos estruturais de concreto protendido	Deve ser considerada, quando necessário, a força de protensão como carregamento externo com os valores $P_{k\max}$ e $P_{k\min}$ para a força desfavorável e favorável, respectivamente, conforme definido na seção 9
	Perda do equilíbrio como corpo rígido	$S(F_{sd}) \geq S(F_{nd})$ $F_{sd} = \gamma_{gs} G_{sk} + R_d$ $F_{nd} = \gamma_{gn} G_{nk} + \gamma_q Q_{nk} - \gamma_{qs} Q_{s,\min}$ , onde: $Q_{nk} = Q_{1k} + \sum \psi_{oj} Q_{jk}$
Especiais ou de construção <sup>2)</sup>		$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{oj} F_{qjk}) + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
Excepcionais <sup>2)</sup>		$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{eg} F_{egk} + F_{q1exc} + \gamma_q \sum \psi_{oj} F_{qjk} + \gamma_{eq} \psi_{oe} F_{eqk}$
<p>Onde:</p> <p><math>F_d</math> é o valor de cálculo das ações para combinação última;</p> <p><math>F_{gk}</math> representa as ações permanentes diretas;</p> <p><math>F_{egk}</math> representa as ações indiretas permanentes como a retração <math>F_{sgk}</math> e variáveis como a temperatura <math>F_{eqk}</math>;</p> <p><math>F_{qk}</math> representa as ações variáveis diretas das quais <math>F_{q1k}</math> é escolhida principal;</p> <p><math>\gamma_g, \gamma_{eg}, \gamma_q, \gamma_{eq}</math> – ver tabela (2.2.1);</p> <p><math>\psi_{oj}, \psi_{oe}</math> - ver tabela (2.2.2);</p> <p><math>F_{sd}</math> representa as ações estabilizantes;</p> <p><math>F_{nd}</math> representa as ações não estabilizantes;</p> <p><math>G_{sk}</math> é o valor característico da ação permanente estabilizante;</p> <p><math>R_d</math> é o esforço resistente considerado como estabilizante, quando houver;</p> <p><math>G_{nk}</math> é o valor característico da ação permanente instabilizante;</p> <p><math>Q_{nk} = Q_{1k} + \sum_{j=2}^m \psi_{oj} Q_{jk}</math>;</p> <p><math>Q_{nk}</math> é o valor característico das ações variáveis instabilizantes;</p> <p><math>Q_{1k}</math> é o valor característico da ação variável instabilizante considerada como principal;</p> <p><math>\psi_{oj}</math> e <math>Q_{jk}</math> são as demais ações variáveis instabilizantes, consideradas com seu valor reduzido;</p> <p><math>Q_{s,\min}</math> é o valor característico mínimo da ação variável estabilizante que acompanha obrigatoriamente uma ação variável instabilizante.</p> <p><sup>1)</sup> No caso geral, devem ser consideradas inclusive combinações onde o efeito favorável das cargas permanentes seja reduzido pela consideração de <math>\gamma_g = 1,0</math>. No caso de estruturas usuais de edifícios essas combinações que consideram <math>\gamma_g</math> reduzido (1,0) não precisam ser consideradas.</p> <p><sup>2)</sup> Quando <math>F_{g1k}</math> ou <math>F_{g1exc}</math> atuarem em tempo muito pequeno ou tiverem probabilidade de ocorrência muito baixa <math>\psi_{oj}</math>, pode ser substituído por <math>\psi_{2j}</math>.</p>		

Os carregamentos usuais considerados nas pontes rodoviárias são previstos na NBR 7187 [1987]:

- A. Carga permanente – Peso próprio da estrutura de concreto armado ou protendido com  $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$ , estrutura metálica com  $\gamma_s = 78,5 \text{ kN/m}^3$ , pavimentação  $\gamma_{pv} = 24 \text{ kN/m}^3$ , guarda-rodas, e qualquer elemento fixado a ponte;
- B. Carga móvel – Conforme o tipo da ponte e a classe da rodovia, definida pela NBR 7188 [1984];
- C. Força longitudinal – Devido à frenagem e aceleração dos veículos, deve ser aplicada na superfície de rolamento e igual ao maior dos seguintes valores: 5% do peso do carregamento do estrado com as cargas móveis distribuídas, ou 30% do peso do veículo tipo;
- D. Cargas de vento – Incidem transversalmente sobre a ponte e a carga móvel, deve ser atendido o disposto na NBR 6123 [1988];
- E. Empuxo de terra – Deverá ser considerado de acordo com os princípios da Mecânica dos Solos, com peso específico do solo, no mínimo, igual a  $18 \text{ kN/m}^3$  e ângulo de atrito interno, no máximo igual a  $30^\circ$ ;
- F. Pressão da água em movimento – A pressão da água em movimento sobre os pilares e elementos das fundações pode ser determinada através da Expressão (2.2.1).

$$p = kv_a^2 \quad (2.2.1)$$

onde:  $p$  é a pressão estática equivalente, em  $\text{kN/m}^2$ ;

$v_a$  é a velocidade da água em  $\text{m/s}$ ;

$k$  é um coeficiente dimensional cujo valor é 0,34 para elementos com seção transversal circular. Para seção transversal retangular, o valor de  $k$  é função do ângulo de incidência em relação ao plano da face do elemento, conforme Tabela (2.2.4). Para situações intermediárias o valor de  $k$  deve ser obtido por interpolação linear. A pressão  $p$  deve ser considerada sobre uma área igual a da projeção do elemento plano perpendicular à direção do movimento da água.

Tabela (2.2.4) – Valores de  $k$  em função do ângulo de incidência - NBR 7187

Ângulo de Incidência	$k$
$90^\circ$	0,71
$45^\circ$	0,54
$0^\circ$	0

Outros carregamentos excepcionais podem ser previstos e avaliados em casos específicos.

NBR 7188 [1984] estabelece a carga móvel atuante na estrutura, sistema de carga representativo dos valores característicos dos carregamentos provenientes do tráfego que a estrutura está sujeita em serviço. A carga móvel também é referida pelo termo: trem-tipo, o qual para este projeto será adotado a classe 45 – cuja base do sistema é um veículo-tipo de 450 kN de peso total detalhado na Figura (2.2.7).

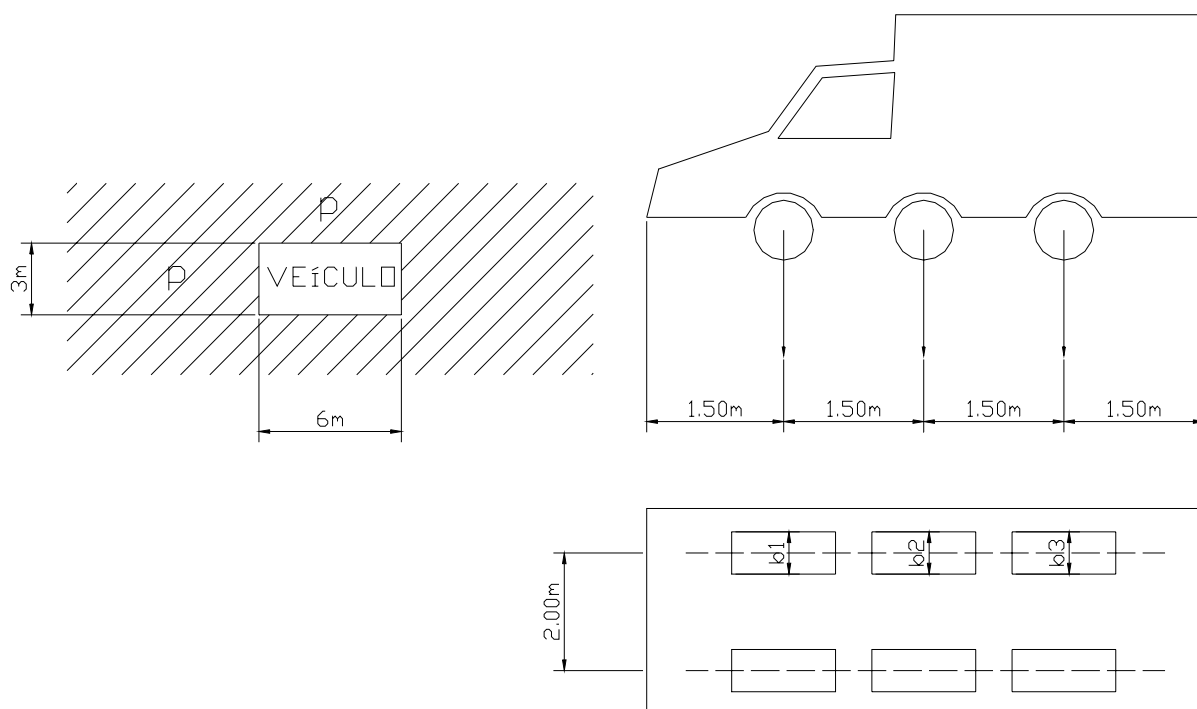


Figura 2.2.7 – Trem-tipo para ponte rodoviária classe 45

Onde:

- $p$  - carga uniformemente distribuída = 5 kN/m<sup>2</sup>
- $b1$  – largura de contato de roda dianteira = 0,50m
- $b2$  – largura de contato de roda intermediária = 0,50m
- $b3$  – largura de contato de roda traseira = 0,50m
- Comprimento de contato de cada roda = 0,20m

**O veículo-tipo, sempre orientado na direção do tráfego, é colocado na posição mais desfavorável para o cálculo de cada elemento, não se considerando a porção do carregamento que provoque redução das solicitações.**

Os guarda-rodas e as barreiras, centrais ou externos, são verificados para uma força horizontal concentrada com 60 kN de intensidade aplicada em sua aresta superior.



No cálculo dos arcos ou vigas principais, permite-se homogeneizar as cargas distribuídas e subtrair das cargas concentradas dos veículos as parcelas correspondentes àquela homogeneização, desde que não haja redução de solicitações.

A NBR 7187 [1987] também define o coeficiente de impacto que assimila as cargas móveis com as cargas estáticas equivalentes.

$$\varphi = 1,4 - 0,007L \geq 1,00 \quad (2.2.2)$$

Onde:

- $\varphi$  - coeficiente de impacto;
- $L$  – comprimento, em metros, de cada vão teórico do elemento carregado. No caso de vãos desiguais, em que o menor vão seja igual ou superior a 70% do maior, permite-se considerar um vão ideal equivalente à média aritmética dos vãos teóricos. Para vigas em balanço,  $L$  é tomado igual a duas vezes o seu comprimento.

O impacto não deve ser considerado na determinação do empuxo de terra provocado pelas cargas móveis, no cálculo de fundações e nos passeios das pontes rodoviárias.

## 2.3 DETERMINAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES MÁXIMAS

Descobrir a posição mais desfavorável do veículo tipo (carregamento móvel) e ainda não considerar as porções de carregamento que provocam alívio das solicitações, não é tarefa das mais fáceis. A estratégia de solução será criar uma base para cada efeito elástico a ser considerado (momento fletor, cortante, reações de apoio) em cada seção transversal previamente definida.

Em vigas ou pórticos esta base é conhecida como linhas de influência e para o caso de placas ou lajes a base utilizada é denominada de superfícies de influência. Baseado no princípio da superposição de esforços elásticos, as bases são construídas conforme o fluxograma da Figura (2.3.1).

O efeito elástico de qualquer carregamento aplicado à estrutura pode ser obtido através da base por combinação linear, isto facilita a identificação dos nós que vão receber o carregamento móvel. Quando se avalia um efeito com valor positivo, as parcelas da base com valor negativo não entrarão na combinação linear para o carregamento móvel, assim como para um valor negativo do efeito, não se consideram os valores positivos da base na combinação linear para o carregamento móvel. Desta forma, obtêm-se as envoltórias dos efeitos máximos e mínimos que serão utilizados no dimensionamento da estrutura e fundação.

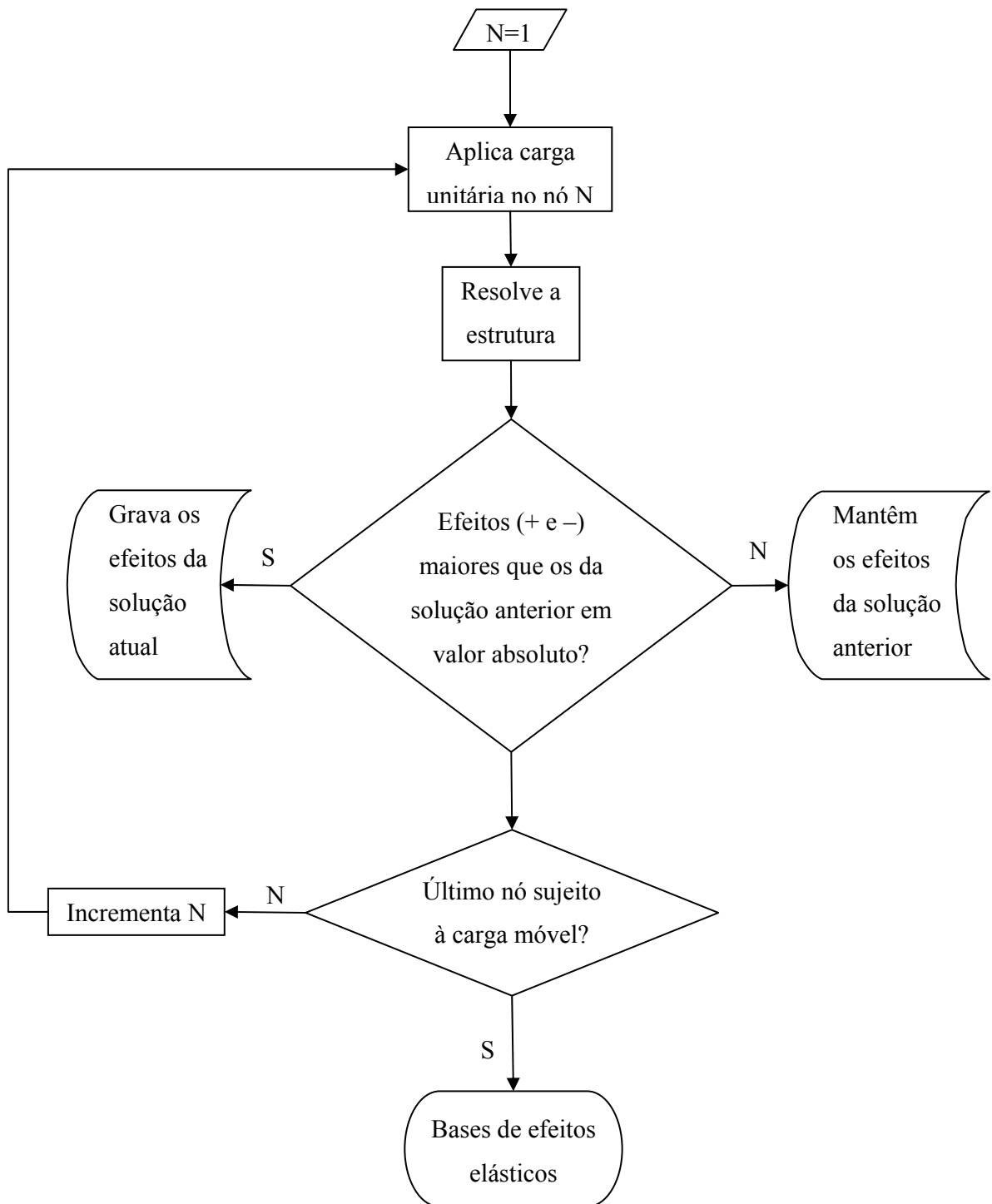


Figura 2.3.1 – Fluxograma para obter as bases de efeitos elásticos

### 2.3.1 Linhas de influência

SÜSSEKIND [1991] define o que são **Linhas de Influência**: Linha de influência de um efeito elástico  $E_s$  em uma dada seção  $S$  é a representação gráfica ou analítica do valor deste efeito, naquela seção  $S$ , produzido por uma carga concentrada unitária, de cima para baixo, que percorre a estrutura. A seção e o efeito estudado são fixos, apenas a posição da carga é variável, ou seja, para cada seção e solicitação da estrutura existe uma linha de

influência. A resolução do problema da carga móvel baseando-se no conceito de linhas de influência englobará duas fases distintas:

1. Dada a estrutura, o efeito  $E_s$  e a seção  $S$ , obter sua linha de influência;
2. Conhecidas as cargas atuantes e a linha de influência, obter a envoltória dos efeitos.

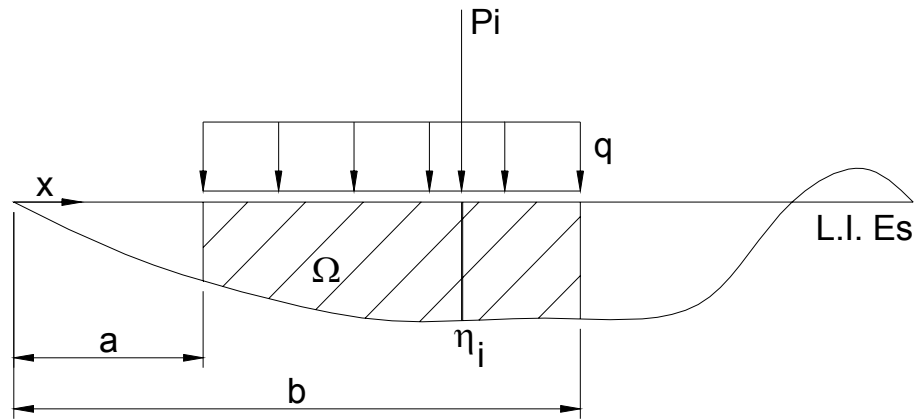


Figura 2.3.2 – Linha de Influência

Na Figura (2.3.2) temos uma linha de influência onde cargas concentradas e distribuídas são aplicadas. O efeito provocado pela carga concentrada será  $P_i \eta_i$  e para a

carga distribuída será  $\int_a^b (q \cdot dx) \eta_i = q \cdot \Omega$ , generalizando podemos escrever:

$$E_s = \sum (P_i \cdot \eta_i + q \cdot \Omega) \quad (2.3.1)$$

Onde:

$E_s$  - Efeito elástico;

$\eta_i$  - Ordenada da linha de influência;

$\Omega$  - Área de influência.

Procedimento para obter as linhas de influência da estrutura, por elementos finitos:

1. Gerar a estrutura, a discretização da viga deve ser suficientemente precisa para representar as alterações significativas nas seções transversais (por exemplo: décimos do vão);
2. Gerar a matriz **LI** (Linhas de Influência) que será bidimensional, [número de nós da estrutura ( $N_{est}$ ) x número de nós sujeitos á carga móvel ( $N_{cm}$ )];

3. Faça de  $N = 1$  até  $N = N_{cm}$ , onde  $N$  é um contador que aponta para os nós sujeitos à ação da carga móvel;
4. Resolver a estrutura com a carga unitária posicionada no nó  $N$  que está sujeito a ação da carga móvel e, com o pós-processamento dos resultados, obtêm-se os efeitos elásticos (momento, cortante, reações de apoio);
5. Gravar os valores dos efeitos na matriz **LI** na posição  $[N_{est} \text{ (nó da estrutura)}, N]$ , observar que a cada passo  $N$ , é preenchida uma coluna de **LI**;
6. Incrementa-se  $N$ . Se  $N \leq N_{cm}$  (número de nós sujeitos à carga móvel), voltar ao passo 3, senão encerra-se a fase de solução por elementos finitos;
7. A linha de influência para cada nó será a linha correspondente na matriz **LI**, conforme ilustra a Tabela (2.3.1).

Tabela 2.3.1 – Matriz **LI**

Nós sujeitos à carga móvel Nós da estrutura	1	2	...	N	Linhas de Influência
1	$a_{11}$	$a_{12}$		$a_{1N}$	L.I. para o nó (ou seção) 1
2	$a_{21}$	$a_{22}$		$a_{2N}$	L.I. para o nó (ou seção) 2
...					...
Nº nós da estrutura	$a_{Nós1}$	$a_{Nós2}$		$a_{NósxN}$	L.I. para o nó (ou seção) Nós

Se a malha de elementos finitos for apenas uma viga 2D, o número de nós da estrutura será o mesmo número de nós sujeitos à carga móvel.

Este procedimento pode ser estendido para superfícies de influência.

A elaboração das linhas de influência facilita a obtenção da envoltória de esforços máximos e mínimos. Na aplicação da carga móvel, não se considera a porção do carregamento que provoca redução nas solicitações, assim, para os efeitos máximos serão consideradas apenas as áreas  $\Omega$  e ordenadas  $\eta_i$  positivas da Figura (2.3.2) e para os efeitos mínimos somente os valores negativos. Para os carregamentos permanentes como peso próprio e peso do pavimento, todos os valores da linha de influência devem ser considerados para a composição do efeito elástico na seção em estudo.

### 2.3.2 Superfícies de influência

MASON [1977] descreve o procedimento das superfícies de influência que é semelhante ao das linhas de influência nas estruturas lineares. As superfícies de influência descrevem o efeito num determinado ponto da placa (momento fletor, força cortante, torção ou qualquer efeito elástico), produzido por uma força unitária atuante noutro ponto qualquer da placa.

Devido ao carácter bidimensional da placa, pode ser necessário calcular área e volume entre a superfície de influência e a placa, interceptados por linhas ou área de aplicação das cargas, como mostra a Figura (2.3.3).

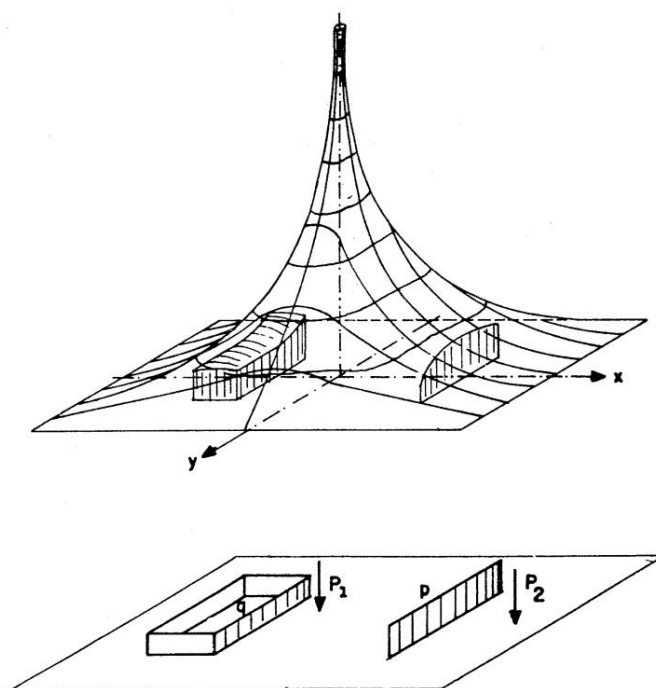


Figura 2.3.3 – Superfícies de Influência - MASON

Analogamente as linhas de influência, para cada seção e efeito elástico em estudo devem determinar as superfícies de influência e então com as cargas atuantes obter a envoltória dos efeitos. Para calcular um determinado efeito elástico em uma seção  $S$  usamos a Equação (2.3.2).

$$E_s = \sum (P_i \eta_i + q_i \Omega_i + p_i \Gamma_i) \quad (2.3.2)$$

Onde  $\Gamma_i$  e  $\Omega_i$  são volumes e áreas determinados na superfície de influência pela projeção no plano da placa das áreas ou linhas de atuação das cargas e os  $\eta_i$  representam as ordenadas, na superfície de influência, dos pontos de atuação das cargas concentradas. O cálculo de áreas e volumes deve ser realizado por processos numéricos.

## 2.4 OTIMIZAÇÃO – VISÃO GERAL

O conceito de otimização pode ser definido como o ato de se alcançar o melhor resultado sob determinadas restrições. Frequentemente buscamos otimizar nosso tempo, custos, rendimentos ou qualquer outro objetivo relevante. Em todas as áreas do conhecimento, a procura pelo ótimo despende grandes recursos humanos e financeiros, os pesquisadores procuram dentro de um universo de soluções, qual é a melhor, respeitando as limitações impostas pelo problema a ser abordado.

Um problema de otimização pode ter solução única, múltiplas soluções ou não ter solução. Dependendo das restrições do problema, talvez exista uma única solução capaz de atender a todas as restrições, ou seja, a solução ótima foi alcançada com o simples fato de atender as restrições. As restrições também podem inviabilizar a solução, ou seja, o domínio factível pode vir a ser vazio, acarretando na não existência de solução.

Felizmente existe uma gama de problemas que podem ser otimizados, por exemplo:

- Qual o formato ótimo de uma asa de avião para ter o máximo de sustentação com o mínimo de arrasto?
- Como deve ser a porta de um carro para resistir um determinado impacto lateral com o mínimo de massa?
- Qual o melhor *Lay Out* dos pilares, vigas e fundações em um edifício para minimizar o custo?
- Qual a melhor proporção de refino dos derivados de petróleo para obter o máximo de lucro?
- Qual a dosagem ótima de um medicamento com o mínimo de prejuízo à saúde do paciente?
- Como realizar investimentos financeiros para obter o máximo de lucro?

Otimização estrutural é uma classe de problemas de otimização onde a determinação da função objetivo ou restrições requer o uso da análise estrutural (geralmente por elementos finitos) SAITOU, *et al* [2005].

Para formular um problema de otimização é necessário realizar a tradução de um problema físico para um problema matemático bem definido. Para tanto, um modelo é descrito através da definição de vários parâmetros, onde são atribuídos valores para os mesmos. Alguns destes podem ser selecionados para serem manipulados (variáveis do projeto), a fim de satisfazerem os requisitos do problema. Assim ocorrendo, pode-se afirmar que estas variáveis de projeto, caso satisfaçam as restrições impostas ao modelo, pertencem a um domínio factível ou viável. Caso contrário, as mesmas pertencem a um domínio inviável.

Com relação à avaliação da eficiência de cada sistema, o problema de otimização requer a definição de uma função objetivo (ou função mérito) a qual é definida em termos das variáveis de projeto. Durante a otimização, as variáveis devem observar limites provenientes da imposição de restrições, tais como: normas técnicas, funcionalidade, manufaturabilidade, critério de resistência de materiais, etc.

Um tipo de problema de projeto pode ser identificado pela otimização estrutural. Neste caso, o grupo de parâmetros é subdividido em parâmetros pré-fixados e variáveis de projeto. Porém, é necessário determinar os valores ótimos das variáveis de projeto, de forma que as mesmas maximizem ou minimizem uma função específica denominada de função objetivo ou função custo. Estas variáveis também devem satisfazer o grupo de requisitos geométricos denominados de restrições laterais e ou comportamental (físico), e de restrições de estado que são especificados a priori para o projeto.

A formulação de um problema de otimização pode ser resumida em três etapas. Considera-se a primeira, a mais importante na formulação do problema, onde é realizada a identificação das variáveis de projeto em função do conjunto de parâmetros que definem a estrutura ou o componente. Já a segunda, trata-se da identificação da função objetivo, que irá avaliar o desempenho do projeto em relação aos parâmetros selecionados como variáveis do projeto. Por fim, a terceira etapa identifica e desenvolve as expressões matemáticas responsáveis pela imposição das restrições ao projeto da estrutura ou componente, sendo que estas restrições dependem das variáveis de projeto.

VANDERPLAATS [1984] aborda os conceitos de otimização em problemas com e sem restrição. São apresentados procedimentos para minimização de funções de uma variável e multivariáveis, técnicas de programação matemática com restrições não lineares. Também são abordadas técnicas visando a solução de um problema com restrição, através da solução de uma seqüência de problemas sem restrição, como por exemplo, o método da penalidade e principalmente o Método do Lagrangeano Aumentado.

ARORA [1989] no o livro *“Introduction to Optimal Design”* apresenta vários métodos utilizados em otimização. A referência engloba desde conceitos básicos do cálculo vetorial até algoritmos dos métodos abordados. São utilizados vários exemplos para introduzir os conceitos fundamentais de otimização, sendo uma fonte de consulta quase obrigatória.

BASTOS [2004] apresenta a tese de mestrado propondo a utilização de algoritmos genéticos (AG) para a otimização de seções retangulares de concreto submetidas à flexo-compressão oblíqua. A técnica dos algoritmos genéticos são métodos de otimização e busca inspirados nos mecanismos de evolução das espécies, estes algoritmos seguem o princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto. Conforme a teoria da evolução proposta por Charles Darwin, quanto melhor um indivíduo se adaptar ao seu meio ambiente, maior será a sua chance de sobreviver e gerar descendentes. Os algoritmos genéticos

manipulam uma população de indivíduos, cada um com valor de aptidão associado, para uma nova geração de indivíduos. Cada indivíduo da população em cada geração representa uma possível solução, o AG busca dentro do conjunto de soluções do espaço de busca, sempre em direção ao ponto ótimo global, o indivíduo de maior aptidão.

Diferente dos métodos matemáticos que são determinísticos, os AG introduzem dados e parâmetros estocásticos no processo de otimização que requer somente a avaliação da função objetivo, resolvendo o problema do ponto de vista probabilístico.

O autor destaca a facilidade do método em tratar funções objetivo descontínuas ou com suas derivadas descontínuas, e também salienta a robustez do método em relação aos métodos matemáticos nas aplicações de concreto armado. Entretanto, o custo computacional é elevado, principalmente na questão da avaliação dos indivíduos pela função objetivo.

Para ARORA [1989], o problema de otimização se resume, principalmente, na minimização ou maximização. Para tanto, este objetivo pode ser expresso através de uma função de determinadas variáveis que definem o modelo. Desta forma, o termo otimização pode ser definido como um processo que procura encontrar as condições que proporcionam o máximo e o mínimo valor de uma função. Para facilitar a compreensão destes conceitos, a Figura (2.4.1) ilustra graficamente a diferença entre máximo e mínimo de uma função. Conforme a ilustração, se um ponto  $x^*$  corresponde ao valor mínimo da função  $f(x)$ , o mesmo também corresponde ao máximo valor da função negativa  $-f(x)$ . Diante disto, pode-se afirmar que otimização é a minimização de uma função, caso a maximização for encontrada pelo mínimo do negativo desta mesma função.

Cabe salientar que o aspecto matemático relacionado à formulação dos problemas de otimização está fundamentado nas teorias do cálculo. Sendo assim, a aplicação da derivada para resolução dos chamados problemas de extremo de uma função pode ser considerada uma importante ferramenta na realização do cálculo.

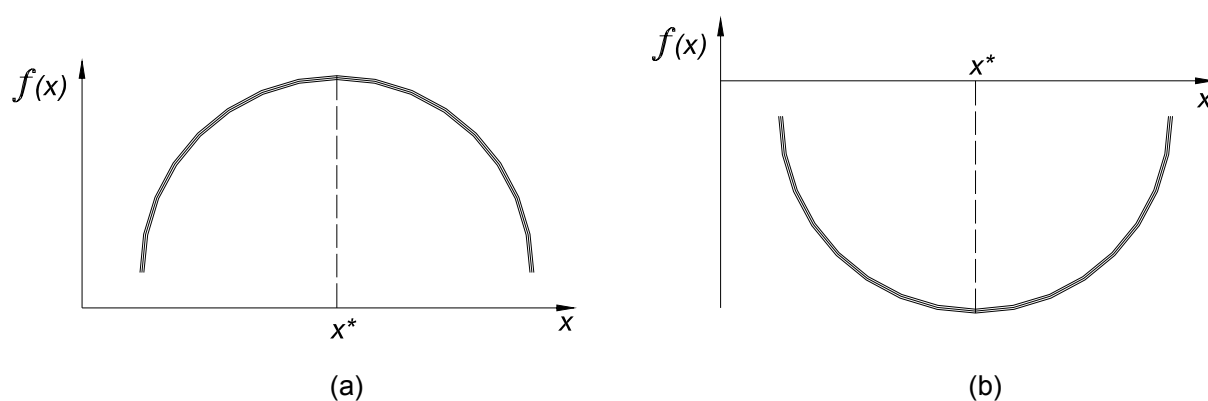


Figura 2.4.1 – Função unimodal - ARORA



SAITOU, *et al* [2005] apresentam uma revisão sobre o histórico da análise estrutural com otimização. Várias referências são citadas para métodos de otimização estrutural abrangendo tanto métodos determinísticos quanto heurísticos. Os autores também abordam as técnicas de otimização no contexto de fabricação, montagem e projeto conceitual.

Uma breve história da análise estrutural e otimização pode ser resumida nas seguintes fases:

1. **Começo da década de 80:** Análise estrutural substitui testes físicos em alguns setores, a otimização estrutural não era viável para alta performance com os recursos computacionais disponíveis;
2. **Década de 80:** Análise estrutural torna uma importante ferramenta para exploração e iteração de projeto, cresce o interesse pela otimização estrutural;
3. **Década de 90:** Juntamente com projetos desenvolvidos em CAD 3D nos *desktop*, a análise estrutural proporciona importante avanço para redução no ciclo de projeto, a otimização torna uma opção efetiva para alguns produtos;
4. **2000 até atualidade:** Análise estrutural substitui completamente os testes físicos em vários produtos, a otimização estrutural passa a ser uma ferramenta de projetos e ganha mais popularidade.

## CAPÍTULO 3

### 3 DIMENSIONAMENTO DE CONCRETO ARMADO

#### 3.1 PROJETO ÓTIMO EM CONCRETO ARMADO

Seja o projeto de uma ponte, carro, avião ou um edifício, existem diversos modelos, concepções e materiais para elaborar o projeto. Evidente que um código de otimização não é capaz de contemplar todas as possibilidades de um projeto genérico. Muitas vezes a otimização é realizada isoladamente nos componentes de uma estrutura sem considerar a interação entre eles.

Para formular um problema de otimização, deve-se adotar uma concepção de projeto e então otimizar os elementos pertinentes a esta concepção. Ou seja, cada concepção de projeto deve ter um código de otimização e, quanto maior o número de variáveis e funções que compõem a formulação, maior será a precisão e confiabilidade da otimização. Entretanto, o número elevado de variáveis e funções torna o processamento caro e, dependendo do *solver*, podem ocorrer problemas de convergência.

Nos projetos de pontes em concreto armado com viga contínua, existem diversas variáveis explícitas e implícitas, que podem ser tratadas em um código de otimização, entre elas destacam-se:

- quantidade, posição, geometria e dimensões dos apoios;
- disposição da armadura nos apoios;
- quantidade, posição, geometria e dimensões das vigas;
- disposição da armadura das vigas;
- espessura da laje do tabuleiro;
- resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ).

Conforme mencionado anteriormente, este trabalho aborda a otimização parcial das seções transversais de concreto armado, sendo esta, uma etapa importante no projeto de pontes em concreto armado. Geralmente, as vigas em pontes são consideradas como seção “T”, onde a NBR 6118 [2004] prescreve as condições para se considerar a largura colaborante da laje que compõe a seção transversal da viga.

Primeiramente será proposto um procedimento numérico para dimensionamento das seções de concreto armado que corresponde a solução de um problema não linear. O dimensionamento está baseado no conceito de Estado Limite Último (ELU) onde aço ou o concreto ou ambos, atingem o máximo de sua capacidade seja em tensão ou deformação. Na sequência serão apresentados os métodos e procedimentos de otimização, o método dos elementos finitos, análise de sensibilidade e encerrando o capítulo a aplicação nas seções de concreto.

Neste trabalho serão otimizadas as seções transversais da viga principal de uma ponte em concreto armado, sendo a minimização o custo por unidade de comprimento o objetivo do problema. Foram utilizados elementos de viga 2D na modelagem por elementos finitos. No dimensionamento, utilizou-se seção “T” para os momentos positivos e seção retangular nos momentos negativos. A Figura (3.1.1) mostra o fluxograma genérico do código para otimização das seções com elementos de viga.

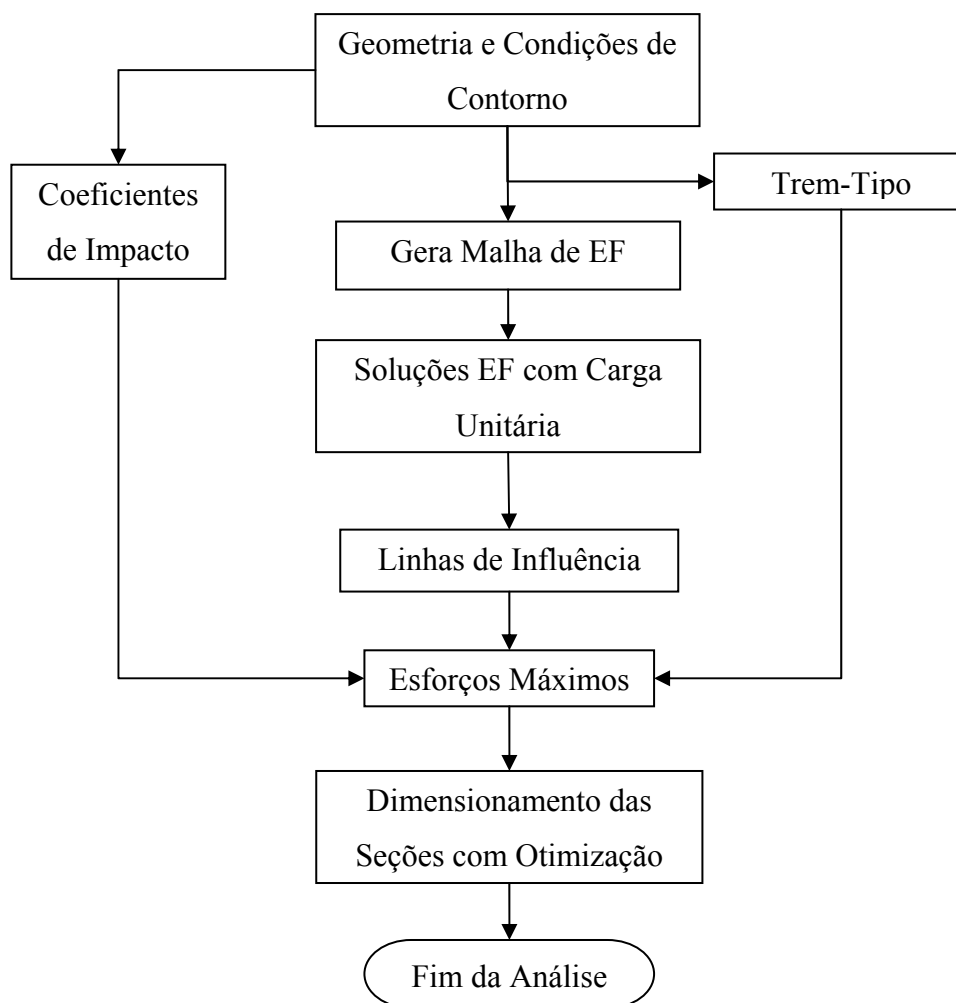


Figura 3.1.1 – Fluxograma para otimização das seções da viga principal

### 3.2 SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO

Conforme bibliografia apresentada, o dimensionamento das seções de concreto armado submetida a solicitação normal, é realizado por processos iterativos. Em geral, os métodos adotam valores para a dimensão da seção, resistência dos materiais e arranjo da armadura e, por tentativas, determina-se a posição da linha neutra verificando se a área de aço está compatível com os esforços solicitantes. Caso os esforços resistentes sejam inferiores aos solicitantes, incrementa-se a área de aço até atingir um valor que os esforços resistentes

sejam maiores ou iguais aos solicitantes. Se a área de aço ultrapassar um valor limite imposto pela norma NBR 6118 [2004], as dimensões da seção e/ou o arranjo da armadura devem ser alterados.

Este trabalho propõe uma abordagem diferente. Ao invés de se incrementar a área de aço, o processo iterativo soluciona a equação de equilíbrio. Esta formulação permite generalizar o problema para todos os tipos de solicitações normais, o que será fundamental na otimização. Outra vantagem da formulação por equilíbrio será na análise de sensibilidade por métodos analíticos, uma vez que o equilíbrio das solicitações será a equação de estado.

A estratégia adotada foi igualar os esforços solicitantes (Figura 3.2.1), com os esforços resistentes (Figura 3.2.2), supondo que somatória das forças e momentos deve ser igual a zero.

Dada uma área de concreto e uma posição da armadura, a solução do problema será encontrar a menor área de aço ( $A_s$ ) capaz de satisfazer as condições de equilíbrio (Equações 2.1.1) dentro das condições de compatibilidade e respeitando os limites de resistência e deformação de cada material. Infelizmente a formulação por equilíbrio também tem desvantagens, pois para algumas combinações de carregamento e arranjo de armadura, pode existir mais de uma solução. Nestes casos, será adotado o menor valor de  $A_s$  maior que zero.

Neste trabalho será abordado apenas o dimensionamento de seções submetidas à flexão normal composta, ou seja, a flexão ocorre em torno de um eixo. Os processos aqui desenvolvidos podem ser estendidos para a flexão oblíqua, neste caso o equilíbrio deverá ser determinado em torno de dois eixos, o que acarreta em dois processos iterativos simultâneos: posição e inclinação da linha neutra.

#### CORTE LONGITUDINAL DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO

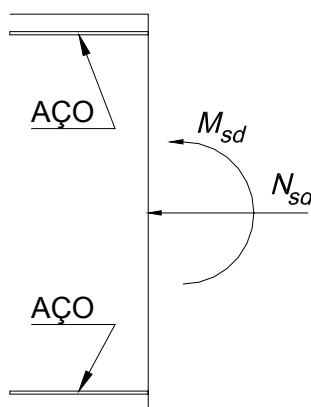


Figura 3.2.1 – Esforços solicitantes

## CORTE LONGITUDINAL DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO

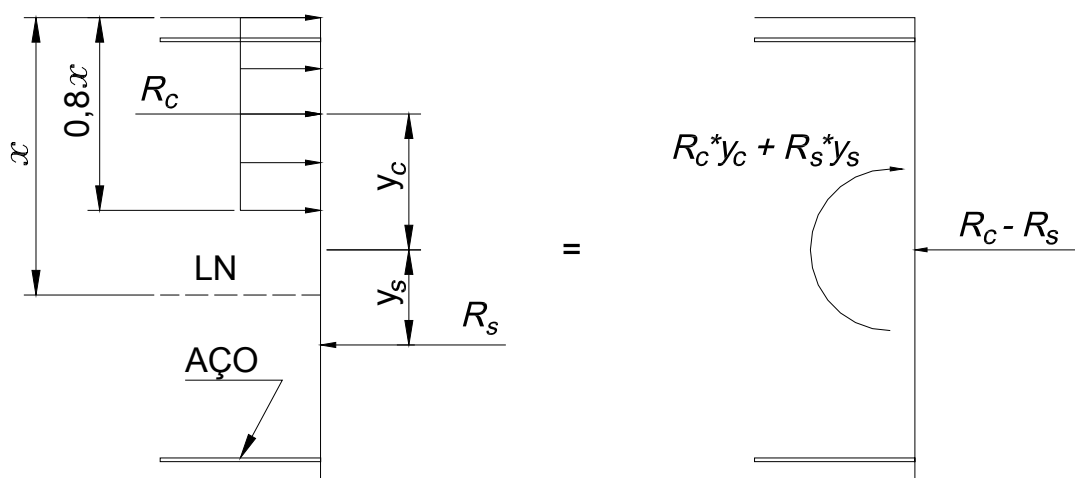


Figura 3.2.2 – Esforços resistentes

Onde, as variáveis nas Figuras (3.2.1 e 3.2.2) representam:

$M_{sd}$  – Momento de projeto;

$N_{sd}$  – Normal de projeto;

$LN$  – Linha neutra;

$R_s$  – Resultante das armaduras de aço;

$y_s$  – Ponto de aplicação da resultante do aço;

$R_c$  – Resultante do concreto

$y_c$  – Ponto de aplicação da resultante do concreto;

$x$  – Profundidade da linha neutra

Para uma da seção transversal com esforço axial e flexão em torno de um eixo, será fixada a profundidade  $x$  da zona comprimida, impondo-se o valor de  $\varepsilon_{sd} = 10\text{‰}$  nos domínios 1 e 2, o valor de  $\varepsilon_{cd} = 3,5\text{‰}$  nos domínios 3, 4 e 4a e o valor de  $\varepsilon_{cd} = 2\text{‰}$  no domínio 5. Com a posição da linha neutra arbitrada e a deformação imposta pelo domínio correspondente, todas as tensões podem ser calculadas e conseqüentemente a resultante do concreto. A resultante do aço não pode ser calculada porque ainda não foi determinada a área de aço.

A área de aço será determinada pela condição de equilíbrio: somatória das forças ou momentos igual a zero. Dependendo do arranjo da armadura e da posição da LN, pode

ocorrer que a soma das tensões nas barras de aço seja próxima de zero, neste caso utiliza-se a condição de somatório dos momentos igual a zero, para calcular a área de aço. Caso contrário utiliza-se somatório das forças igual a zero.

As Equações de equilíbrio (2.1.3) fornecem então os valores dos esforços resistentes (normal e momento) da seção e o seu ponto de aplicação.

Se os esforços resistentes forem iguais aos esforços solicitantes, dentro da tolerância adotada, a seção está solucionada, do contrário deve-se escolher uma posição da linha neutra alterando a profundidade  $x$  da zona comprimida.

Assim, a Equação (3.2.2) define o resíduo ( $Res$ ), onde a solução do problema será quando  $Res \leq$  tolerância:

$$\begin{cases} \text{Se } \sum_{i=1}^{N_{Barras}} \sigma_{si} < 10^{-1} \rightarrow Res = N_{sd} + R_c + R_s \\ \text{Senão } \rightarrow Res = M_{sd} + M_c + M_s \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Onde:

$N_{Barras}$  – Numero de barras de aço;

$\sigma_{si}$  – Tensão do aço na barra  $i$ ;

$M_c$  – Momento no CG da seção devido a resultante do concreto;

$M_s$  – Momento no CG da seção devido a resultante do aço;

A profundidade da linha neutra  $x$  é a única variável independente no processo iterativo para a solução de uma seção de concreto armado sujeita a flexão composta em torno de um eixo, conforme Figuras (3.2.1) e (3.2.2). Nos problemas de flexão oblíqua, além da profundidade da linha neutra  $x$ , também a sua inclinação seria outra variável independente. A profundidade da linha neutra  $x$  também define a região comprimida da seção ( $0,8x$ ) que para este trabalho foi adotado o diagrama retangular de tensões.

O domínio da função  $Res$  (não confundir com os domínios de deformação) varia de  $-\infty$  no caso de tração centrada a  $+\infty$  para o caso de compressão centrada. Nos casos onde ocorre flexão, a posição da linha neutra assume um valor intermediário dentro do intervalo de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

O código tem como objetivo ser o mais genérico possível, com a capacidade de solucionar uma seção com qualquer geometria, seja qual for o arranjo das armaduras de aço e também para todos os tipos de carregamento normal à seção. Entretanto esta generalização produz algumas implicações como:

- utilizar integral numérica para seções com geometria complexa;
- se a seção transversal na região comprimida ou o arranjo das armaduras não possuir simetria em relação ao eixo vertical, a resultante do concreto ou aço produzirá flexão adicional em torno deste eixo;
- para cada tipo de geometria e arranjo das armaduras será necessário determinar a área comprimida, o centróide desta área e o centróide da resultante das forças nas barras de aço, que variam conforme a variação da linha neutra, sendo então conveniente elaborar bibliotecas de seções.

A idéia do método é tratar o dimensionamento de elementos lineares submetidos a solicitações normais, de forma sistemática. Assim, pode-se elaborar um código robusto com a capacidade de ser empregado em qualquer problema de dimensionamento de seções de concreto armado submetidas a solicitações normais. Entretanto, como foi mencionado anteriormente, isto acarreta em um domínio da função variando de  $-\infty$  a  $+\infty$  e também, dependendo do problema, as Equações de equilíbrio (2.1.3) podem ter mais de uma solução. O código pode ser resumido em:

- Dados:
  - solicitações normais;
  - geometria e dimensões da seção;
  - arranjo da armadura;
  - resistência do aço e concreto.
- Encontrar a menor área de aço capaz de resistir às solicitações.

Neste trabalho, a biblioteca de seções contempla seções circulares, retangulares com armadura simétrica e armadura simples e seções “T” com armaduras na proporção de 2:1 entre a face inferior e superior. O Apêndice 2 apresenta as deduções para a seção circular. Para criar novas seções, a distribuição de armadura pode ser facilmente implementada, bastando entrar com as coordenadas das barras parametrizadas em relação à seção transversal. A determinação da área e centróide da região comprimida é obtida por integral, se houver solução analítica para a geometria da seção transversal o resultado é direto, mas dependendo do tipo de seção, a determinação da área e centróide da região comprimida deve ser por integral numérica.

Para o código atender todos os casos, faz-se uma varredura ao longo de todo o domínio da função. Cada faixa de valor da profundidade da linha neutra  $x$  pertence a um domínio de deformação (Figura 2.1.1), assim, atribuem-se os limites de  $x$  e o passo de busca correspondente ao domínio de deformação em análise. Quando a flexão é pequena, comparada com o esforço axial (domínios 1 e 5), a tendência da linha neutra é permanecer

fora da seção atingindo valores elevados, assim o passo de busca recebe um valor elevado e a cada iteração este valor é incrementado por uma função exponencial, conforme Equação (3.2.3).

$$x_0 = x_0 + k^{k/10} \alpha \quad (3.2.3)$$

Onde:

$x_0$  é a profundidade da linha neutra;

$k$  é o número da iteração;

$\alpha$  é uma constante adotada para calibrar o passo de busca.

Nos demais casos (domínios 2, 3 e 4), onde a linha neutra permanece dentro da seção, utiliza-se valores pequenos para o passo de busca incrementado por função linear,

$$x_0 = x_0 + \alpha \quad (3.2.4)$$

Os valores adotados para  $\alpha$  são:

- Domínio 1,  $\alpha = -H_{\text{seção}}$ ;
- Domínios 2, 3 e 4,  $\alpha = 0,05.H_{\text{seção}}$ ;
- Domínio 5,  $\alpha = 0,01.H_{\text{seção}}$ ;

Definidos os limites do domínio de deformação, calculam-se os resíduos correspondentes a estes limites definidos por  $R_0$  e  $R_1$ . Se os resíduos possuírem sinais diferentes significa que existe solução no intervalo considerado. Caso isto não ocorra, deve-se incrementar a posição da linha neutra  $x$  até encontrar os resíduos com sinais diferentes ou atingir o limite do domínio de deformação.

Quando a posição da linha neutra  $x$  atinge o limite do domínio considerado sem encontrar resíduos com sinais diferentes, a área de aço é penalizada (atribui-se um valor alto como exemplo  $10^3$ ). A busca é iniciada novamente com os intervalos do próximo domínio de deformação e conseqüentemente com os limites do concreto e aço para o domínio em análise.

Somente quando os resíduos atingem valores diferentes dentro de um domínio de deformação, inicia-se a busca de linha através do método da bisseção conforme fluxograma da Figura (3.2.4). Com este processo é possível diminuir o tempo de processamento, pois a iteração é realizada em um intervalo reduzido. A solução do problema (mínimo global) será o menor valor da área de aço encontrada em cada domínio. O processo iterativo adotado para a solução deste problema não linear está indicado no fluxograma da Figura (3.2.3)



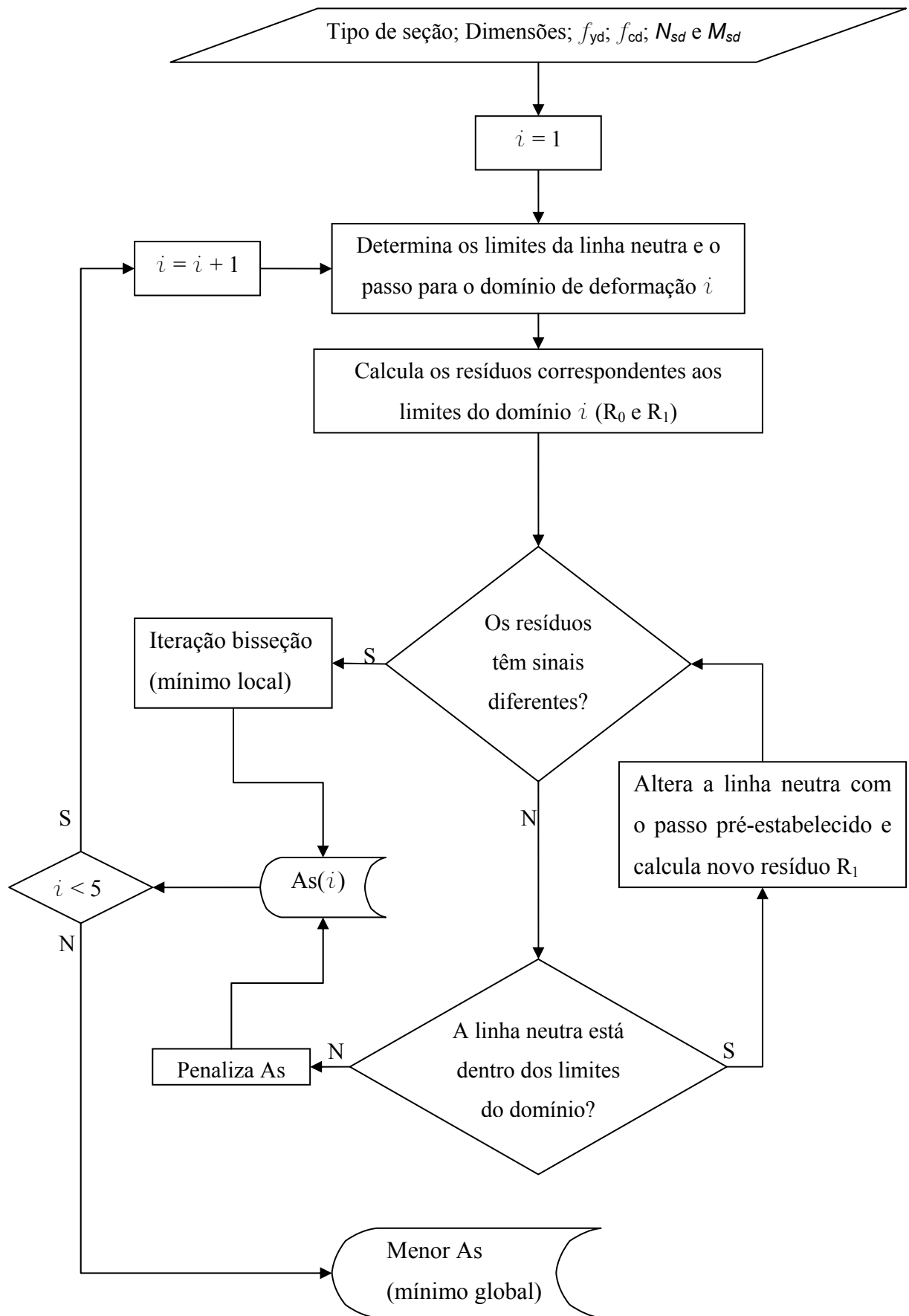


Figura 3.2.3 – Fluxograma para determinar a área de aço

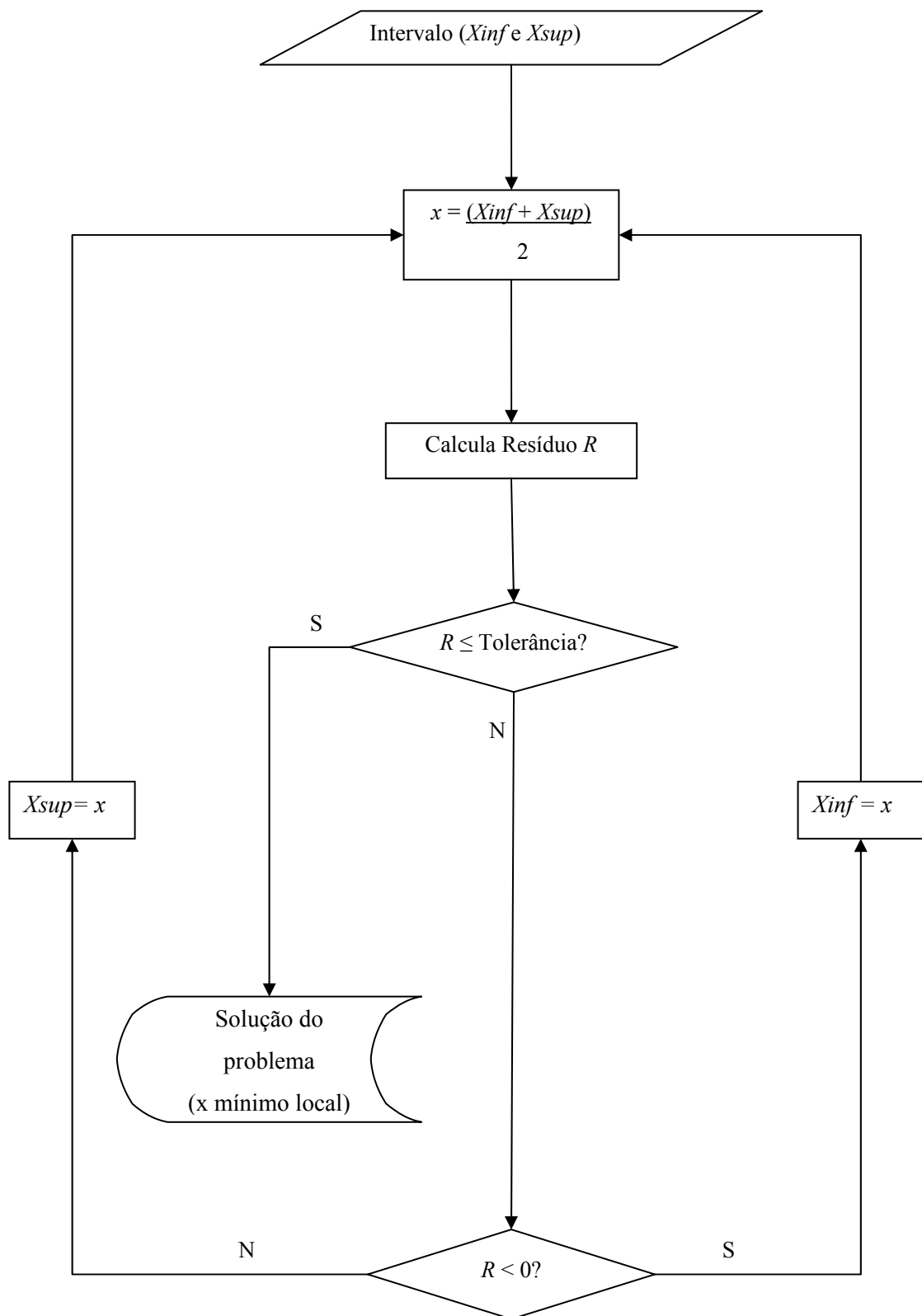


Figura 3.2.4 – Fluxograma do método da bisseção

## CAPÍTULO 4

### 4 ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) teve início para resolver problemas de análise de tensões aplicados na engenharia estrutural. Entretanto, a técnica de modelagem matemática deste método aliada a crescente capacidade de processamento dos computadores digitais e também com equipamentos cada vez mais acessíveis, permitiu a expansão do MEF para todas as áreas da engenharia e se tornou uma das ferramentas mais poderosas e populares, inclusive com aplicações em outras áreas da ciência.

Os problemas atuais de engenharia são, na maior parte dos casos, muito complexos para resolvê-los com soluções analíticas tradicionais, o que, para cada caso, exigiria uma abordagem específica. O MEF possibilita a solução dos problemas de maneira sistemática, gerando simultaneamente várias equações algébricas em função do problema físico e resolve o sistema de equações através de procedimentos numéricos. Dificilmente o resultado será exato, o que exige muito cuidado e atenção na escolha e calibração do modelo para obter resultados com precisão aceitável no ambiente industrial.

O método de elementos finitos divide o domínio do problema contínuo em vários subdomínios, cada subdomínio é denominado de elemento finito. A partição do domínio deve ser suficientemente refinada de modo a garantir que a interpolação polinomial em cada elemento (subdomínio) tenha capacidade de representar com precisão, os efeitos atuantes em seu interior e fronteiras. O erro tende a zero quando o número de elementos tende a infinito, entretanto, quanto maior o número de elementos maior será a quantidade de equações e conseqüentemente aumentará o esforço computacional.

As equações definidas na teoria da elasticidade linear devem ser empregadas na apresentação dos conceitos matemáticos básicos que envolvem o MEF. Os conceitos envolvem a transformação do problema de equilíbrio na sua forma original (formulação forte) onde a solução da equação diferencial é ponto a ponto para uma forma integral (formulação fraca) onde o espaço de solução é ampliado.

Inicialmente, é necessário formular o problema de valor de contorno para elasticidade, da seguinte forma:

Dado  $f: \Omega \rightarrow R^3$ ,  $\mathbf{t}: \Gamma_T \rightarrow R^3$ , encontrar  $\mathbf{u}_i: \Omega \rightarrow R^3$ , tal que:

$$\text{div} \mathbf{T}(x) + f(x) = 0 \quad ; \quad \forall x \in \Omega \quad (4.1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad ; \quad \forall x \in \Gamma_T \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{u}} \quad ; \quad \forall x \in \Gamma_u \quad (4.3)$$

A Equação de Equilíbrio (4.1) e as Condições de Contorno (4.2) e (4.3), são dadas em função do vetor unitário normal  $\hat{n}$ , das componentes do vetor tração  $\mathbf{t}$ , e pelo vetor deslocamento  $\mathbf{u}$ . Um corpo genérico que ocupa um volume  $\Omega$  e que esteja delimitado por uma superfície  $\Gamma$ , pode ser visualizado através da Figura (4.1). O seu contorno é dividido em  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_T$ , considerando que em  $\Gamma_u$  o deslocamento é prescrito, conforme indicado na Equação (4.3), e em  $\Gamma_T$ , a tração é prescrita, conforme Equação (4.2).

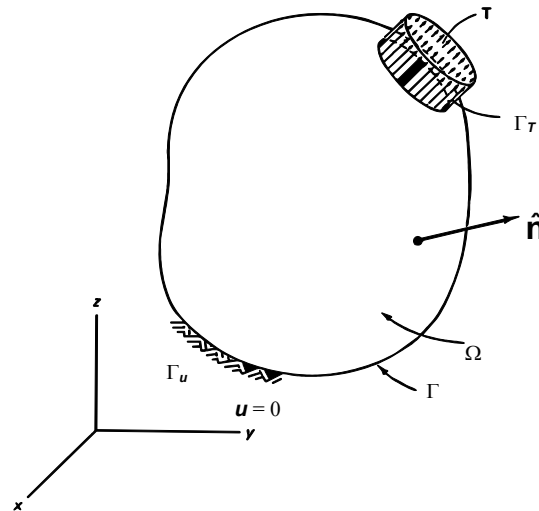


Figura 4.1 – Sólido genérico e condições de contorno – BELEGUNDU & CHANDRUPATLA.

A solução do problema é obtida através da eliminação dos movimentos de corpo rígido. Quanto à equação de equilíbrio, esta deve ser satisfeita em todos os pontos do domínio  $\Omega$ , levando-se em consideração as condições de contorno.

### Princípios Matemáticos para o MEF

Após definição da formulação forte, com as condições de contorno prescritas para um corpo genérico, pode-se, então, avaliar os métodos alternativos para encontrar as soluções do problema proposto. Para problemas com simplicidade geométrica, a integração analítica torna-se muito simples. Porém, o processo analítico é impraticável, quando se tem um domínio geométrico arbitrário. A solução deste pode ser viabilizada através do método numérico. Diante disto, aplica-se o método de elementos finitos, que permite a aproximação de soluções de diversos tipos de equações diferenciais que descrevem ou modelam matematicamente problemas físicos da mecânica do contínuo. Para utilizar o MEF, é importante analisar o problema de equilíbrio através de uma formulação matemática denominada de Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) (Método de Galerkin).

#### I. Princípios dos Trabalhos Virtuais para Elasticidade Tridimensional - PTV

O PTV relaciona o conjunto de forças externas que atuam no corpo e as correspondentes forças internas originadas, que satisfazem à condição de equilíbrio. Além disso, também leva em consideração um conjunto de deslocamentos e a correspondente componente de deformação, satisfazendo as condições de compatibilidade da teoria da elasticidade. A formulação forte ou diferencial, definida nas Equações (4.1), (4.2) e (4.3), é transformada na formulação fraca ou integral do problema de equilíbrio. De maneira geral o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser enunciado conforme BELEGUNDU [1991] da seguinte forma:

“Um corpo está em equilíbrio se o trabalho virtual feito pelas forças externas é igual ao trabalho virtual interno absorvido pela estrutura para todo campo de deslocamento cinematicamente admissível”.

Considerando os seguintes conjuntos:

$$Kin_u = \{ \mathbf{u}(x) \mid \mathbf{u}(x), \text{ suficientemente regular, } \mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) \text{ em } \Gamma_u \}, \text{ e}$$

$$Var = \{ v(x) \mid v(x), \text{ suficientemente regular, } v(x) = 0 \text{ em } \Gamma_u \},$$

que são, respectivamente, o conjunto dos deslocamentos admissíveis e o conjunto das variações dos deslocamentos admissíveis. Então, a integração da Equação (4.1) é dada por:

$$\int_{\Omega} [\text{div} \mathbf{T}(x) + f(x)] \cdot v(x) d\Omega = 0, \quad \forall v(x) \in Var \quad (4.4)$$

A qual, após algumas manipulações algébricas, fornece:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = 0, \quad \forall v(x) \in Var \quad (4.5)$$

Considerando o teorema da divergência e como o tensor de tensão  $\mathbf{T}$  (tensor tensão de Cauchy) é simétrico e  $\varepsilon(v)$  é a parte simétrica, tem-se:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla v = \mathbf{T} \cdot \varepsilon(v), \quad (4.6)$$

logo, a Equação (4.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \varepsilon(v) d\Omega + \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = 0, \quad \forall v(x) \in Var \quad (4.7)$$

Porém, como  $v(x) \in Var$  e  $v(x) = 0$  em  $\Gamma_u$ , logo:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} \cdot v d\Omega = \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} \cdot v d\Gamma \quad (4.8)$$

Por outro lado, sabe-se que  $\mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t}$ , o que implica

$$\int_{\Gamma_T} \mathbf{t} \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \varepsilon(v) d\Omega, \quad \forall v(x) \in Var \quad (4.9)$$

Desta forma, o Princípio dos Trabalhos Virtuais é definido, considerando:

a) trabalho das forças externas:

$$W_E = \int_{\Gamma_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad , \quad \forall \mathbf{v}(x) \in Var \quad (4.10)$$

b) trabalho das forças internas:

$$W_I = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad , \quad \forall \mathbf{v}(x) \in Var \quad (4.11)$$

Para o problema da elasticidade linear se introduz a equação constitutiva para um sólido elástico linear e isotrópico. Assim, dado um deslocamento  $\mathbf{u}(x)$  no corpo é possível determinar a deformação  $\varepsilon(\mathbf{u}(x))$  e a tensão  $\mathbf{T}(\mathbf{u}(x))$  do corpo através das relações constitutivas que são expressas por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}(x)) = 2 \cdot \nu \cdot \varepsilon(\mathbf{u}(x)) + \mu \cdot (\text{tr } \varepsilon) \cdot \mathbf{I} \quad (4.12)$$

na qual

$$\nu = \frac{E}{2(1+\eta)} \quad ; \quad \mu = \frac{\eta \cdot E}{(1+\eta) \cdot (1-2\eta)} \quad (4.13)$$

são os parâmetros de Lamé, com o módulo de elasticidade  $E$  e o coeficiente de Poisson  $\eta$ , incorporados na expressão. Outra forma usual de escrever a relação constitutiva é dada a seguir:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}(x)) = \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}(x)) \quad (4.14)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo, da teoria da elasticidade, com o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson nele incorporados, da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\eta) \cdot (1-2\eta)} \begin{bmatrix} (1-\eta) & \eta & \eta & 0 & 0 & 0 \\ \eta & (1-\eta) & \eta & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \eta & (1-\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\eta)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\eta)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\eta)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

e a deformação é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

e  $\boldsymbol{T} = \{T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{23}, T_{13}\}$ .

Desta forma, se resume o problema de equilíbrio em procurar o deslocamento  $\boldsymbol{u}(x)$ , que produz um estado de tensão interno  $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(x))$  e que equilibra os esforços externos  $(f, \boldsymbol{t})$ .

A formulação fraca do problema de equilíbrio é dada por:

Dado  $f: \Omega \rightarrow R^3$ ,  $\bar{u}: \Gamma_u \rightarrow R^3$  e  $\bar{t}: \Gamma_T \rightarrow R^3$ , determinar  $\boldsymbol{u}(x) \in Kin$ , tal que,

$$\int_{\Gamma_T} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} \, d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot \boldsymbol{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, d\Omega \quad , \quad \forall \boldsymbol{v}(x) \in Var \quad (4.17)$$

## II. Método de Galerkin

O método de obtenção de uma solução aproximada do problema real de valor de contorno é agora analisado. Inicialmente, determinaram-se as condições forte e fraca do problema de equilíbrio, baseado no PTV, o qual é base para a formulação matemática do método de elementos finitos.

Analisando o conjunto  $Var$ , verificam-se duas propriedades fundamentais: primeiramente  $Var$  é um espaço linear de funções e a segunda é que  $Var$  tem dimensão infinita. Desta forma, são necessárias infinitas funções para representar o conjunto  $Var$ . Esse conceito serve também para o conjunto  $Kin$ , já que,  $Kin_u = Var_u + \{u_p\}$ , onde  $u_p$  é uma função particular de  $Kin_u$ . Basicamente, a idéia do método é aproximar a solução por um conjunto de dimensão finita  $Var^h$ . Seja  $v^h(x) \in Var^h$ , então

$$v^h(x) = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \varphi_i(x) \quad ; \quad v_i \in R \text{ arbitrária} \quad (4.18)$$

As funções  $\varphi_i$ , definem o subespaço de aproximação  $n$ -dimensional  $Var^h$  de  $Var$ , onde cada  $v^h(x)$  em  $Var^h$ , é determinado por uma combinação linear das funções base

$\varphi_i(x) \in Var$ . Considerando o método de Galerkin para determinação de soluções aproximadas para o problema de valor de contorno, baseado na formulação fraca definida pela Equação (4.17), então  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^h(x) + \mathbf{w}(x)$ , na qual  $\mathbf{u}^h(x) \in Var^h$  e  $\mathbf{w}(x) \in Kin^h$ , onde

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \cdot \varphi_i(x) \quad (4.19)$$

Desta forma o problema pode ser descrito como sendo:

Seja  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^h(x) + \mathbf{w}(x)$ , onde  $\mathbf{w}(x) \in Kin^h$  é conhecido. Determinar  $\mathbf{u}^h(x) \in Var^h$ , tal que,

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{u}^h) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h) d\Omega = \int_{\Gamma_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C} \varepsilon(\mathbf{w}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^h) d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}^h(x) \in Var^h \quad (4.20)$$

O problema consiste em determinar  $\mathbf{u}_i \in R$ .

Uma outra forma de se representar a Equação (4.20) é através da forma clássica de representação matricial. Pode-se então reescrever a Equação (4.16) na forma

$$\varepsilon(\mathbf{u}^h) = \nabla \mathbf{u}^h = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (4.21)$$

onde,  $\mathbf{N}$  representa a matriz das funções base  $\varphi_i(x) \in Var$ , que dependem da formulação do elemento finito utilizado,  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento e  $\mathbf{D}$  representa o operador linear definido como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Considerando:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{N} \quad (4.23)$$

onde,  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona o vetor deformação ao vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ , pode-se reescrever a Equação (4.21) na forma

$$\varepsilon(\mathbf{u}^h) = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.24)$$

da mesma forma para  $\mathbf{v}^h$  se tem



$$\varepsilon(v^h) = \mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (4.25)$$

Portanto, fazendo as devidas substituições na Equação (4.20), chega-se ao seguinte problema:

Dado  $f: \Omega \rightarrow R^3$ ,  $\bar{\mathbf{u}}: \Gamma_u \rightarrow R^3$  e  $\mathbf{t}: \Gamma_T \rightarrow R^3$ , determinar  $\mathbf{u} \in R^n$ , tal que,

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} d\Omega = \int_{\Gamma_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{N}\mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{N}\mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{C}\varepsilon(w) \cdot \mathbf{B}\mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in R^n \quad (4.26)$$

Isolando  $\mathbf{v}$  e reordenando os termos da equação integral chega-se a forma:

$$\underbrace{\left[ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \right]}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \underbrace{\int_{\Gamma_T} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \varepsilon(w) d\Omega}_{\mathbf{F}} \quad (4.27)$$

Representando a Equação (4.27) na forma simplificada:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.28)$$

onde a matriz  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  é usualmente referida como matriz de rigidez, o vetor  $\mathbf{F}$  é conhecido como vetor de carga e  $\mathbf{u}$  representa o vetor deslocamento.

Para a consideração de problemas não lineares, somente ocorrerá alteração na matriz  $\mathbf{K}$ , que se apresenta de forma genérica na Equação (4.28), já que podem ser incorporados elementos que determinam a não linearidade do material, ou ainda a não linearidade geométrica, e também no vetor de forças pode ocorrer alteração. Aqui se procurou dar uma idéia básica sobre os conceitos matemáticos que estão incorporados em muito dos programas comerciais de elementos finitos, além do que, para abordar os aspectos relativos aos gradientes de funções e análise de sensibilidade no processo de otimização é importante ter também estes conceitos.

## Elementos de viga 2D

Todos os elementos reais que compõem um corpo são tridimensionais. Entretanto, alguns elementos possuem características geométricas específicas às quais permitem criar modelos aproximados que simplificam o tratamento matemático sem prejuízo da precisão desejada. É o caso das vigas e barras que podem ser modeladas por elementos unidimensionais, o comprimento é muito superior em relação às dimensões da seção transversal. Assim, pode-se considerar, de maneira geral, que um elemento de viga possui como propriedade a área e momento de inércia em função da posição em relação ao comprimento.

Para simplificar o problema ainda mais, é comum considerar a seção transversal constante ao longo do elemento, sendo a variação da seção transversal definida através da discretização adequada do domínio. Também são admitidas outras hipóteses quanto à deformação da viga que são as hipóteses cinemáticas:

- Seções planas perpendiculares ao eixo neutro da viga permanecem planas após a deformação;
- Seções planas perpendiculares ao eixo neutro da viga permanecem perpendiculares ao eixo neutro após a deformação;
- As fibras perpendiculares ao eixo neutro não variam de comprimento.

Estas hipóteses constituem o modelo aproximado de viga fina proposto por Euler-Bernoulli, Figura (4.2). Em vigas de concreto, as hipóteses de vigas finas são válidas quando o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal [NBR 6118, 2004].

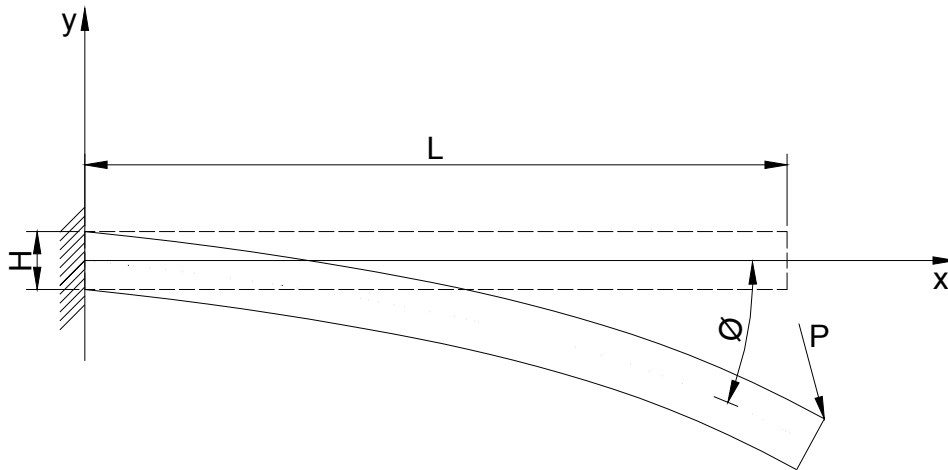


Figura 4.2 – Campo de deslocamento da viga 2D

Como nos casos bi-dimensionais, o problema está restrito ao plano  $xy$ , o campo de deslocamento é definido por:

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_x + v(x, y)\mathbf{e}_y \quad (4.29)$$

Considerando as hipóteses cinemáticas, temos:

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x) - y \frac{dv}{dx} \quad (4.30)$$

Com os gradientes obtêm-se as componentes do tensor deformação infinitesimal

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.31)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad e, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim o tensor deformação infinitesimal será:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

No caso de flexão pura,  $u(x) = 0$ , então:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -y \frac{d^2 v}{dx^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Admitindo material elástico linear pode-se aplicar a Lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -y E \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.35)$$

Pela definição do momento aplicado na seção, tem-se:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_{xx} b dy = -E \frac{d^2 v}{dx^2} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \quad (4.36)$$

Definindo a constante  $I$  como momento de inércia da seção da seguinte forma:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \quad (4.37)$$

Obtêm-se a equação do momento,

$$M = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.38)$$

Como consequência, se obtém a equação diferencial da elástica de uma viga fina:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - q(x) = 0 \quad (4.39)$$

A formulação forte ou diferencial não é adequada para aplicação do MEF, assim, faz-se o uso da forma fraca ou integral com o Princípio dos Trabalhos Virtuais na Equação (4.39). Aplicando-se as condições de contorno, obtém-se a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais para o modelo de viga:

$$-Q(L)\hat{v}(L) - M(L)\hat{v}'(L) - \int_0^L q(x)\hat{v} dx + \int_0^L EI v'' \hat{v}'' dx = 0 \quad \forall \hat{v}(x) \in (0, L) \quad (4.40)$$

onde  $\hat{v}$  é um deslocamento arbitrário.

O MEF aproxima a Expressão (4.40) através da combinação linear de funções de interpolação aplicadas no domínio discretizado.

$$v(x) \cong v_h(x) = \sum v_i \phi_i(x) \quad (4.41)$$

$$\hat{v}(x) \cong \hat{v}_h(x) = \sum \hat{v}_j \phi_j(x) \quad (4.42)$$

com  $i, j = 1, \dots, N$  sendo  $N$  o número de nós da malha de elementos finitos.

Substituindo as funções de interpolação na expressão (4.40), obtém-se um sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^N EI \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx v_i = \int_0^L q \phi_j dx + M(L) \phi_j'(L) + Q(L) \phi_j(L), \quad j = 1, \dots, N \quad (4.43)$$

Definindo

$$K_{ji} = EI \int_0^L \phi_i'' \phi_j'' dx \quad (4.44)$$

e,

$$F_j = \int_0^L q \phi_j dx + M(L) \phi_j'(L) + Q(L) \phi_j(L) \quad (4.45)$$

a Equação (4.43) pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^N K_{ji} v_i = F_j \quad \text{ou na forma matricial} \quad [K] \{\mathbf{v}\} = \{F\} \quad (4.46)$$

As funções de interpolação devem ter a capacidade de assumir todas as posições possíveis da linha elástica e também ser contínuas na fronteira de dois elementos. No caso de vigas são utilizadas as funções de Hermite que interpolam o deslocamento transversal e a rotação.

## CAPÍTULO 5

### 5 OTIMIZAÇÃO

#### 5.1 FORMULÇÃO DA OTIMIZAÇÃO

As Equações (5.1.1) a (5.1.4) representam genericamente a formulação de um problema de otimização através da definição de um conjunto de equações lineares ou não lineares:

$$\text{Minimizar: } f(\mathbf{x}) \quad (5.1.1)$$

sujeito a:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j = 1, \dots, m; \quad \text{restrição de desigualdade} \quad (5.1.2)$$

$$h_k(\mathbf{x}) = 0; \quad k = 1, \dots, l; \quad \text{restrição de igualdade} \quad (5.1.3)$$

$$x_i^p \leq x_i \leq x_i^u; \quad i = 1, \dots, n; \quad \text{restrição lateral} \quad (5.1.4)$$

Onde:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}; \quad \text{vetor variáveis de projeto;}$$

$l$ , é o número total de restrições de igualdade;

$m$ , é o número total de restrições de desigualdade;

$n$ , é o número total de variáveis de projeto;

$x_i^p$ , é o limite inferior;

$x_i^u$ , é o limite superior.

Com exceção das classes especiais de algoritmos de otimização, as funções devem ser contínuas e diferenciáveis em  $\mathbf{x}$ . Pode-se considerar funções lineares ou não lineares, explícitas ou implícitas em  $\mathbf{x}$ , tanto para a função objetivo representada pela Equação (5.1.1), quanto para as funções restrições definidas pelas Equações (5.1.2) e (5.1.3). As relações implícitas podem ser resolvidas por algum método analítico ou numérico.

A Equação (5.1.4) define os limites laterais, ou restrições de caixa, para as variáveis de projeto (vetor  $\mathbf{x}$ ). As restrições de caixa podem ser incluídas nas restrições de desigualdade, porém, é conveniente tratá-las separadamente. O espaço das variáveis de

projeto é dividido em duas regiões: viável e inviável. A região viável ou domínio viável é definida pelo conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições, e a região onde ocorre violação de pelo menos uma das restrições, é considerada região inviável ou domínio inviável.

Os algoritmos de otimização baseiam-se em processos iterativos para solução de problemas lineares e não lineares. Atribui-se uma estimativa inicial  $\mathbf{x}_i^0$  às variáveis de projeto. Com pequenos incrementos nas variáveis de projeto se obtém um novo conjunto para melhorar o valor da função objetivo  $f(\mathbf{x})$ , ou seja, minimizar esta função dentro das restrições impostas. Este processo pode ser representado conforme a Equação (5.1.5).

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta x_i^k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1.5)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto,  $k$  o número de iterações,  $i$  o número de variáveis de projeto e  $\Delta \mathbf{x}$  representa uma variação ou perturbação na variável de projeto.  $\Delta \mathbf{x}$  também pode ser definido conforme a Equação (5.1.6).

$$\Delta \mathbf{x}^k = \alpha_k \mathbf{d}^k; \quad \alpha_k > 0 \quad (5.1.6)$$

$\alpha_k$  é um escalar positivo que define o passo, ou seja, a distância em que  $\mathbf{x}$  se move na direção  $\mathbf{d}^k$  que é a direção de descida considerada. Substituindo (5.1.6) em (5.1.5) obtêm-se a Equação (5.1.7)

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k \quad (5.1.7)$$

A determinação da Equação (5.1.7) requer a solução de dois subproblemas, onde o primeiro consiste na determinação da direção de descida  $\mathbf{d}^k$ , e o segundo na determinação do comprimento ótimo do passo  $\alpha_k$  na direção de descida, o qual minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ . Existem muitos procedimentos para a determinação de  $\alpha_k$  e do vetor direção de busca  $\mathbf{d}^k$ .

O processo iterativo requer o cálculo de uma direção de descida em  $\mathbf{x}^k$ , e a solução do problema de busca em linha, sendo então determinado o ponto ótimo  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Mas, caso  $\mathbf{x}^{k+1}$  não atenda como ponto de mínimo, isto é, não satisfaça as condições de otimalidade, o processo iterativo pode obter um outro ponto  $\mathbf{x}^{k+2}$ , de modo a ter um valor menor para a função objetivo do que o encontrado com  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Como resultado da busca unidimensional tem-se a Inequação (5.1.8):

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k) \quad (5.1.8)$$

substituindo o termo  $\mathbf{x}^{k+1}$  da Equação (5.1.7) em (5.1.8) se obtém a Expressão (5.1.9):

$$f(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) < f(\mathbf{x}^k) \quad (5.1.9)$$

expandindo linearmente o lado esquerdo da expressão em séries de Taylor, obtém-se a Expressão (5.1.10):

$$f(\mathbf{x}^k) + \alpha_k (\nabla f(\mathbf{x}^k))^T \cdot \mathbf{d}^k < f(\mathbf{x}^k) \quad (5.1.10)$$

Logo,  $\mathbf{d}^k$  é direção de descida e satisfaz a Inequação (5.1.11):

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}^k \rangle < 0 \quad e \quad \alpha_k > 0 \quad (5.1.11)$$

onde  $\langle, \rangle$  é o produto interno.

Este produto interno é a expressão que representa a condição para direção de descida.

Assumindo  $\mathbf{d}^k$  como a direção de descida conhecida, encontrar o passo  $\alpha_k$  envolve a solução de um subproblema para minimizar  $f(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k)$  que é um problema de busca unidimensional com relação à variável  $\alpha$ . Então

$$\bar{f}(\alpha_k) \equiv f(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k) \quad (5.1.12)$$

onde,  $\bar{f}(\alpha_k)$  é a nova função com  $\alpha$  como variável independente. A minimização deve ser sobre todos reais  $\alpha_k$  não negativos, i.e. para  $\alpha_k > 0$ , tais que,  $\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k$ , não viole as restrições de projeto. Se  $\mathbf{d}^k$  é a direção de descida tem-se:

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) = \bar{f}(\alpha_k) < \bar{f}(0) = f(\mathbf{x}^k) \quad (5.1.13)$$

logo,

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) = \min_{\alpha > 0} \bar{f}(\alpha_k) \quad (5.1.14)$$

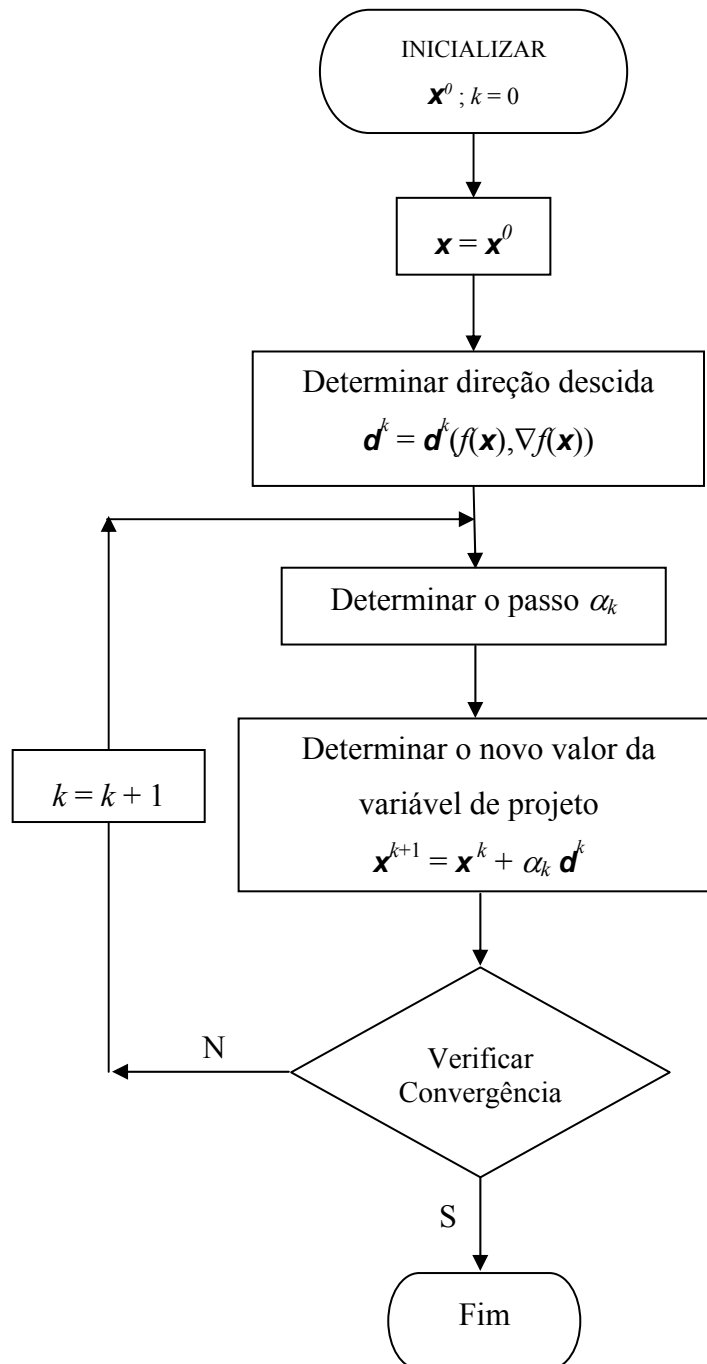


Figura 5.1.1 – Fluxograma para processo genérico de otimização.



No caso de problemas sem restrição onde a função objetivo tem a segunda derivada contínua, pode-se calcular  $\alpha_k$  analiticamente, aplicando as condições necessárias e suficientes de otimalidade, então, para  $\alpha_k \equiv \alpha^*$  tem-se:

$$\left. \frac{d\bar{f}(\alpha_k)}{d\alpha} \right|_{\alpha^*} = 0 ; \text{ condição necessária} \quad (5.1.15)$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{f}(\alpha_k)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha^*} > 0 ; \text{ condição suficiente} \quad (5.1.16)$$

logo, diferenciando  $\bar{f}(\alpha_k)$ , da Equação (5.1.12) se obtém

$$\left. \frac{d\bar{f}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha^*} = \nabla \bar{f}(\alpha) \cdot \mathbf{d}^k \quad (5.1.17)$$

conseqüentemente, a condição necessária para um valor ótimo de  $\alpha_k$  implica em

$$\nabla \bar{f}(\alpha) \cdot \mathbf{d}^k = 0 \leftrightarrow \nabla \bar{f}|_{\alpha^*} \perp \mathbf{d}^k \quad (5.1.18)$$

Então dada a direção de descida, a determinação de  $\alpha^*$ , requer a solução, em geral, da equação não linear

$$\nabla \bar{f}(\alpha) \cdot \mathbf{d}^k = 0 \quad (5.1.19)$$

satisfazendo as condições de otimalidade.

A Figura (5.1.1) ilustra o processo iterativo. Estas deduções caracterizam o chamado método de busca unidimensional. Todo o processo de otimização deve ter um critério de parada do processo iterativo, sendo este um dos fatores mais importantes e decisivos para uma otimização eficiente. A busca deve ser concluída quando nenhum progresso a mais pode ser realizado para melhorar a condição de mínimo da função objetivo sem que sejam violadas algumas restrições impostas. Cabe ressaltar que nos métodos numéricos iterativos, o critério de parada para o processo depende da precisão que se deseja, podendo ser influenciado pela eficiência e confiabilidade do método utilizado. Os processos iterativos em geral verificam as condições de otimalidade também chamadas de condições de Kuhn-Tucker. Nos problemas convexos essas condições são também suficientes de otimalidade para o mínimo global.

## 5.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

Problemas de engenharia com poucas variáveis e funções matemáticas simples que descrevem o seu comportamento com precisão, podem ser facilmente solucionados através de métodos analíticos e gráficos. Entretanto, a maior parte dos problemas de engenharia

possui muitas variáveis, não linearidades ou funções de grande complexidade, assim, as soluções analíticas tornam-se inviáveis e a utilização de métodos numéricos é inevitável.

Funções lineares ou não lineares expressam matematicamente o problema físico. No processo de otimização as funções são definidas como: função objetivo e funções de restrições. Os recursos computacionais são de extrema importância para a solução de problemas numéricos, pois os projetos têm se tornado cada vez mais complexos e diversificados.

Existem algumas vantagens de uma abordagem numérica e programação matemática de otimização não linear:

1. Redução do tempo decorrente, com a utilização de algoritmos numéricos apropriados;
2. Procedimento de otimização lógico e sistêmico;
3. Possibilidade de considerar um grande número de variáveis de projeto e restrições;
4. Não se baseia na intuição e experiência de pessoas. A solução encontrada está matematicamente fundamentada.

Porém, os métodos numéricos possuem algumas limitações, tais como:

1. Aumento do tempo de processamento computacional, com o crescimento do modelo;
2. Dificilmente é possível garantir um ótimo global, assim, pode ser necessário reiniciar o processo para diferentes pontos iniciais, o que proporciona maior segurança quanto ao resultado obtido como mínimo global;
3. Em determinados casos é necessária a calibração de parâmetros, problemas altamente não lineares podem convergir lentamente ou até mesmo não convergir;
4. Muitos algoritmos têm dificuldade em lidar com funções descontínuas;
5. Alguns códigos não possuem um processo automático de otimização, e a sua adaptação necessita de uma reprogramação.

Diante disto, foram desenvolvidos muitos métodos numéricos para otimização não linear. Serão apresentados adiante detalhes e teoria de alguns métodos numéricos mais utilizados.

### 5.2.1 Problemas Sem Restrição

Pode-se dizer que todos os problemas em Engenharia possuem algum tipo de restrição. Entretanto, com a aplicação de técnicas adequadas, a solução destes problemas pode ser obtida através da solução de uma seqüência de problemas sem restrição, sem prejuízo das limitações impostas ao problema.

As técnicas aqui apresentadas para problemas sem restrição, são aplicáveis na solução de sistemas lineares e não lineares. Também são de grande importância para a solução de problemas de otimização com restrição em que são aplicados, por exemplo, o Método de Penalidade e o Método do Lagrangeano Aumentado.

Divide-se o estudo de problemas sem restrição em duas partes: minimização de funções de uma variável e minimização de funções de várias variáveis. A maior parte dos métodos numéricos aplicados em otimização é baseada no conceito de busca unidimensional.

Os processos iterativos de otimização também se dividem em duas partes: a determinação da direção de descida  $\mathbf{d}^k$  e a determinação do passo de descida  $\alpha$ . Este trabalho apresenta os métodos “*Steepest Descent Method*” e os métodos de segunda ordem, como o *Método de Newton* e *Quase Newton*, para determinação da direção de descida ou de busca. Para determinação do passo  $\alpha$ , ou seja, determinação do passo ótimo, são apresentados o método de “*Golden Section Search*”, Interpolação Quadrática e “*Quadratic Golden Section*”.

#### Minimização unidimensional

##### I. Método *Golden Section Search*

Problemas com apenas uma variável também podem ser complexos de resolver analiticamente. Muitas vezes para uma função  $\tilde{f}(\alpha)$ , será necessário empregar um método numérico para encontrar  $\alpha^*$ , tal que,

$$\tilde{f}(\alpha^*) = \min_{\alpha > 0} \tilde{f}(\alpha) \quad (5.2.1)$$

Os processos iterativos de busca unidimensional são, na maioria, técnicas baseadas na comparação dos valores das funções nos vários pontos ao longo da direção de busca. Uma das técnicas mais comuns usadas para minimização unidimensional é o método “*Golden Section Search*”. Tem a vantagem de ser facilmente programável e sua taxa de convergência é conhecida. Para sua aplicação, a função deve ser unimodal porém não

necessita ser diferenciável. Este método é semelhante ao método da bisseção com o fluxograma da Figura (3.2.6), as diferenças serão apresentadas na seqüência.

Um intervalo de incerteza é determinado, em uma função genérica, quando a função  $\bar{f}(\alpha)$  possui um mínimo. O método “*Golden Section Search*” inicia a partir do estabelecimento de limites inferior e superior sobre a variável independente  $\alpha$ . De forma numérica, é determinado o intervalo dentro do qual,  $\alpha$  minimiza  $\bar{f}(\alpha)$ . O intervalo  $(\alpha_l, \alpha_u)$  é denominado intervalo de incerteza ( $I$ ), definido como

$$I = \alpha_u - \alpha_l \quad (5.2.2)$$

tal que

$$\alpha^* \in (\alpha_l, \alpha_u) \quad (5.2.3)$$

Esta técnica divide-se em duas partes, onde a primeira estabelece um intervalo de incerteza inicial  $(\alpha_l, \alpha_u)$ . Desta forma, a função é calculada em cada um dos extremos, obtendo os valores de  $\bar{f}(\alpha_l)$  e  $\bar{f}(\alpha_u)$ . Já a segunda, seleciona pontos intermediários  $(\alpha_1, \alpha_2)$  utilizando a taxa de ouro “*Golden ratio*” baseada na seqüência de Fibonacci, tal que,  $(\alpha_1 < \alpha_2)$ , sendo novamente calculada nestes pontos obtendo  $\bar{f}(\alpha_1)$  e  $\bar{f}(\alpha_2)$ .

A Figura (5.2.1) demonstra graficamente o funcionamento do método “*Golden Section Search*”. Assumindo que a função é unimodal no intervalo desejado,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , formarão o novo intervalo para o mínimo. Se  $\bar{f}(\alpha_1)$  é maior do que  $\bar{f}(\alpha_2)$ , então  $\alpha_1$  forma um novo limite inferior, obtendo um novo intervalo  $(\alpha_1, \alpha_u)$ . Por outro lado, se  $\bar{f}(\alpha_2)$  for maior do que  $\bar{f}(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_l, \alpha_2)$  será o novo intervalo. Com o novo intervalo definido, avalia-se novamente a função no ponto  $\alpha_3$  pertencente a este intervalo para obter  $\bar{f}(\alpha_3)$ . Se,

$$f(\alpha_{k-1}) < f(\alpha_{k-2}), \quad e \quad f(\alpha_{k-1}) < f(\alpha_k) \quad f(\alpha_{k-1}) < f(\alpha_{k-2}) \quad (5.2.4)$$

o mínimo foi ultrapassado e está no intervalo anterior, assim, o intervalo de incerteza é refinado sucessivamente através do processo iterativo, estabelecendo intervalos menores e eliminando as regiões que não contém o mínimo até encontrar o valor mínimo da função de acordo com a tolerância estabelecida.

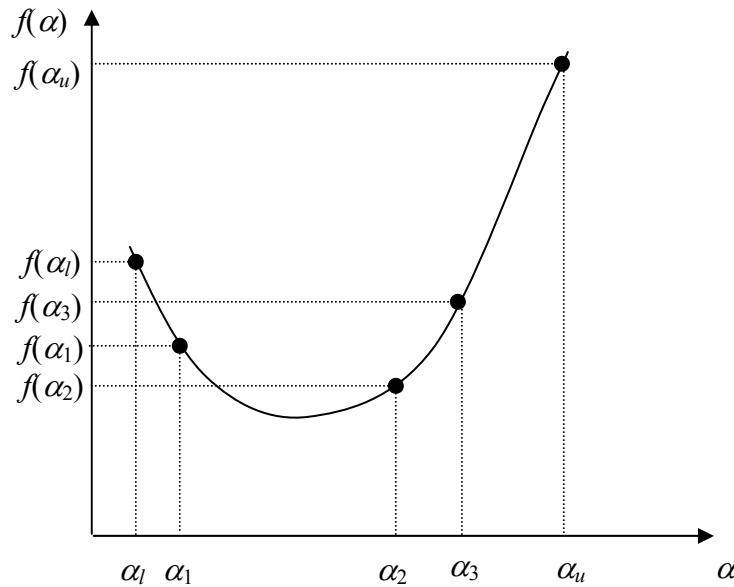


Figura 5.2.1 – Função unimodal – redução do intervalo de incerteza

## II. Método da Interpolação Quadrática

Este método aproxima a função objetivo  $\bar{f}(\alpha)$  por meio de uma curva quadrática a partir de três pontos distintos contidos no intervalo de incerteza. A aproximação poderia ser por um polinômio de maior grau, mas geralmente a aproximação quadrática é suficientemente precisa. Assim, é possível determinar os coeficientes de um polinômio quadrático por:

$$q(\alpha) = a_0 + \sum_{i=1}^2 a_i \alpha^i \quad (5.2.4)$$

$a_0, a_i$  - representam os coeficientes da função polinomial a serem determinados.

Esta técnica exige poucas avaliações da função objetivo, além de não requerer cálculo de sua derivada. É necessário assumir um intervalo cuja função  $\bar{f}(\alpha)$  possua as características de funções unimodais, bem comportadas, suficientemente suaves e que o intervalo de incerteza inicial  $(\alpha_l, \alpha_u)$  seja conhecido. Tomando  $\alpha_i$  como um ponto intermediário qualquer dentro do intervalo de incerteza e  $\bar{f}(\alpha_l)$ ,  $\bar{f}(\alpha_i)$ ,  $\bar{f}(\alpha_u)$  os valores das funções nos respectivos pontos, então  $q(\alpha)$  tem o mesmo valor que a  $\bar{f}(\alpha)$  nos pontos  $\alpha_l$ ,  $\alpha_i$  e  $\alpha_u$ , obtendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
q(\alpha_l) &= a_0 + a_1\alpha_l + a_2\alpha_l^2 = \bar{f}(\alpha_l) \\
q(\alpha_i) &= a_0 + a_1\alpha_i + a_2\alpha_i^2 = \bar{f}(\alpha_i) \\
q(\alpha_u) &= a_0 + a_1\alpha_u + a_2\alpha_u^2 = \bar{f}(\alpha_u)
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

resolvendo este sistema de equações lineares, obtém-se  $a_0, a_1, a_2$ .

O valor mínimo para a função quadrática  $q(\alpha)$  na Equação (5.2.5) é encontrado no ponto  $\hat{\alpha}$ , calculado pelas condições necessária e suficiente, de onde se obtém

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{2 \cdot a_2} \cdot a_1 \quad ; \quad se \quad \frac{d^2 q(\hat{\alpha})}{d\alpha^2} = 2a_2 > 0 \tag{5.2.6}$$

### III. Quadratic Golden Side Search

O Método *Quadratic Golden Search* trata-se de uma combinação entre os Métodos da Interpolação Quadrática, o “*Golden Section Search*” e um algoritmo de procura lateral, que se mostra eficiente e bastante confiável. Este novo algoritmo agrupa as vantagens de cada método, podendo a resolução ser dividida em duas fases. A primeira é a redução do intervalo de incerteza através do método de interpolação quadrática, a um tamanho suficientemente pequeno até que os pontos de interpolação do intervalo subsequente, atinjam a menor distância obedecendo ao critério de tolerância. Já na segunda fase o método “*Golden Section Search*” realiza o processo de comparação da função calculada em cada um dos novos pontos dos novos intervalos, obtendo assim, a solução. Do mesmo modo que o “*Golden Section Search*”, este algoritmo também parte de um intervalo inicial dentro do qual existe um ponto de mínimo local.

### Problema Sem Restrições N-dimensional

Os métodos anteriores determinavam o passo  $\alpha$  considerando uma direção de descida conhecida. Neste momento, a atenção se concentra nos métodos que permitem determinar a direção de descida  $\mathbf{d}^k$ . O princípio básico é que a função objetivo diminua com pequenos incrementos ao longo da direção  $\mathbf{d}^k$ . Estes métodos utilizam informações do gradiente da função a ser minimizada, que podem ser obtidos analiticamente ou numericamente, pela aplicação do método das diferenças finitas. Neste trabalho serão abordados três métodos: “*Steepest Descent Method*”, Método Newton e o Método Variável Métrico – “*Quasi-Newton Methods*”.

## I. “Steepest Descent Method”

O Método “Steepest Descent” ou Método do Gradiente é um dos mais conhecidos métodos para problemas de otimização sem restrição e é o mais antigo e simples, porém de baixa eficiência. Este método pertence à classe de métodos de primeira ordem. Do ponto de vista teórico, possui extrema importância, pois foi o ponto de partida para o desenvolvimento de métodos mais robustos e sofisticados. O Método “Steepest Descent” é definido por um processo iterativo, a partir da Equação (5.1.7), utilizando também o vetor gradiente neste processo. A direção de descida da função objetivo é representada pelo negativo do seu gradiente no ponto considerado. Sendo a função  $f(\mathbf{x})$  diferenciável com relação à  $\mathbf{x}$ , a direção de descida da função no ponto  $\mathbf{x}^k$  é dada por:

$$\mathbf{d}^k = -\nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5.2.7)$$

A Equação (5.2.7) define a direção no domínio do projeto, sendo  $\mathbf{d}^k$  utilizada na Equação (5.1.7) para a execução do processo de busca unidimensional, já tratado anteriormente. Logo,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k \quad (5.2.8)$$

Em que  $\alpha_k$  é a solução do processo de busca unidimensional

$$\bar{f}(\alpha) \equiv \min_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{d}^k) \quad (5.2.9)$$

Portanto, da condição de descida, Equação (5.1.11), obtém-se:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}^k \rangle = \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), -\nabla f(\mathbf{x}^k) \rangle = -\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|^2 < 0 \quad (5.2.10)$$

isto é

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}^k \rangle < 0 & \text{se } \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \neq 0 \\ \langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}^k \rangle = 0 & \text{se } \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| = 0 \end{cases} ; \text{ condição necessária de otimalidade} \quad (5.2.11)$$

e o critério de convergência em geral é dado por:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})\| \leq tol \quad (5.2.12)$$

e

$$\frac{\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|}{\|\mathbf{x}^{k+1}\|} \leq tol \quad (5.2.13)$$

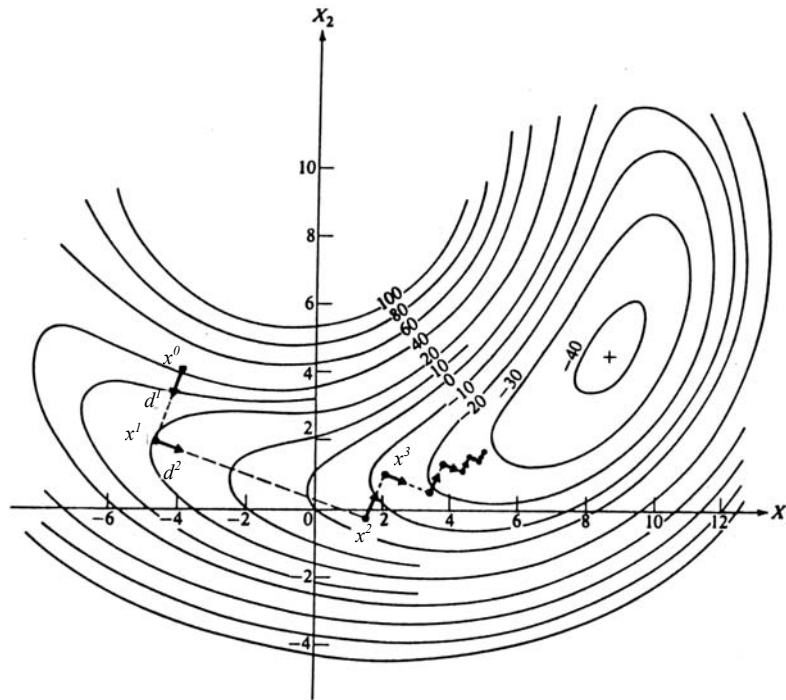


Figura 5.2.2 – Interpretação geométrica do Método “Steepest Descent” segundo Vanderplaats [1984]

O algoritmo básico para realizar a otimização através do Método “*Steepest Descent*” é geometricamente ilustrado na Figura (5.2.2). Verifica-se que o método possui uma taxa de convergência muito pobre e em cada etapa, caso a solução da busca linear seja exata, as direções são ortogonais entre si, ou seja,  $\langle \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}), \mathbf{d}^k \rangle = 0$ .

## II. Método de Newton

Em problemas com a segunda derivada contínua e suficientemente suave, é possível utilizá-las para melhorar a busca da direção de descida, proporcionando uma melhor taxa de convergência. Estes são os chamados métodos de segunda ordem. O Método de Newton se enquadra nesta categoria. Além das informações da função objetivo  $f(\mathbf{x})$  e dos gradientes  $\nabla f(\mathbf{x})$ , também são necessárias as informações de segunda ordem, i.e., da matriz Hessiana  $[\mathbf{H}]$ . A idéia do método fundamenta-se na utilização de uma expansão quadrática em série de Taylor com a finalidade de aproximar localmente a função objetivo  $f(\mathbf{x})$ . Assim, a função aproximada em  $\mathbf{x}^k$  pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} [\mathbf{H}] \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (5.2.14)$$



na qual

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (5.2.15)$$

e,

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) = \mathbf{H}, \quad (5.2.16)$$

que é matriz Hessiana de  $f(\mathbf{x})$  no ponto  $\mathbf{x}^k$ .

Considerando que a Hessiana  $[\mathbf{H}]$  seja positiva definida, então da Equação (5.2.14) tem-se que:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \quad (5.2.17)$$

e impondo condições de estacionaridade em  $\mathbf{x}^{k+1}$ , isto é,

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{k+1}} = 0, \quad \text{condição necessária de otimalidade} \quad (5.2.18)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{k+1}} = 0 \quad (5.2.19)$$

então,

$$\Delta \mathbf{x} = -[\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5.2.20)$$

Para estimar um novo valor  $\mathbf{x}^{k+1}$ , basta usar a equação (5.2.15), portanto,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x} \quad (5.2.21)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5.2.22)$$

Como a Equação (5.2.14) é uma aproximação da função objetivo em  $\mathbf{x}^k$ , não é possível garantir precisão quanto ao ponto de mínimo de  $f(\mathbf{x})$ , portanto o processo deve ser ajustado com estimativas melhores até o mínimo ser alcançado. A cada iteração é necessário calcular a Hessiana e sua inversa, e isto requer um esforço computacional considerável, e pode comprometer a eficiência do método.

O método pode ser aprimorado através da introdução do parâmetro tamanho do passo  $\alpha$ , possibilitando a utilização de qualquer método de busca unidimensional para a determinação do parâmetro  $\alpha$  ótimo, i.e.,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_k \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5.2.23)$$

na qual  $\alpha_k$ , é solução ótima de

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k)) \quad (5.2.24)$$

O uso deste parâmetro permite obter estabilidade e garantia de convergência, desde que a Hessiana permaneça positiva definida, em todas as iterações.

Em um ponto arbitrário, não é possível garantir que a Hessiana seja positiva definida ou mesmo ser inversível. Para contornar este tipo de problema, o método requer alguma modificação e, a solução encontrada foi a combinação do método de Newton com o Método “*Steepest Descent*”, ou seja, caso o método de Newton não seja diretamente aplicável,

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{I} \quad (5.2.25)$$

onde,  $\mathbf{I}$  representa a matriz Identidade. Este procedimento é efetuado em situações em que a Hessiana não é inversível e a direção de descida  $\mathbf{d}^k$ , dada por

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k), \quad (5.2.26)$$

não satisfaça a condição de descida,

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^k), \mathbf{d}^k \rangle < 0. \quad (5.2.27)$$

A violação da condição de descida é a principal dificuldade do Método de Newton. A matriz Hessiana  $[\mathbf{H}]$  pode ser negativa definida ou não inversível. A aplicação deste método se restringe a problemas cuja obtenção da matriz Hessiana, positiva definida, de  $f(\mathbf{x})$  seja simples.

### III. Método Variável Métrico – “*Quasi Newton Methods*”

O Método “*Steepest Descent*” tem uma taxa de convergência pobre pelo fato de utilizar apenas informações de primeira ordem, através do gradiente da função objetivo. O Método de Newton, com as informações da derivada de segunda ordem, possui ótimas propriedades de convergência quando próximo do ponto ótimo. Entretanto, este método requer um esforço computacional muito caro, e também para muitos problemas de engenharia, calcular as derivadas de segunda ordem pode ser extremamente complexo ou até mesmo inviável. Já o Método Variável Métrico pode ser considerado um método intermediário entre o Método “*Steepest Descent*” e o Método de Newton. Neste caso, admite-se que o cálculo da inversa da matriz Hessiana é impraticável e caro. A idéia do

método é aproximar a inversa da Hessiana utilizando as informações provenientes de gradientes de pontos anteriores no processo de busca iterativa.

Particularmente, no caso de funções quadráticas a matriz Hessiana é constante e, à medida que as iterações ocorrem, a matriz inversa da Hessiana é aproximada por uma matriz  $n$ -dimensional  $\mathbf{A}^k$ , com a propriedade:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{H}^{-1} \quad (5.2.28)$$

O Método de Newton é tomado como ponto de partida do processo iterativo, assim, a Equação (5.2.17) é reescrita como:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^k (\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x}^k)) \quad (5.2.29)$$

O Método Variável Métrico considera, inicialmente, no processo iterativo a matriz identidade, ou seja,  $\mathbf{H}^1 = \mathbf{I} = \mathbf{A}^0$ , sendo assim, o Método do “*Steepest Descent*” é aplicado diretamente para a direção de busca. Então, de forma genérica a direção de descida é dada por:

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{A}^k \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k); \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.2.30)$$

Obviamente a matriz aproximada  $\mathbf{A}^k$  deve permanecer positiva definida e simétrica, assim, está garantido que a direção de descida  $\mathbf{d}^k$  moverá  $\mathbf{x}^k$  para um ponto que minimiza a função objetivo. Portanto, a convergência quadrática do Método de Newton é obtida através da atualização da matriz aproximada  $\mathbf{A}^k$ , pois a mesma tende exatamente a inversa da matriz Hessiana. A atualização da matriz  $\mathbf{A}^k$  armazena informações das iterações anteriores e apenas requer a determinação da primeira derivada. Este processo de atualização faz parte de uma família do Método Variável Métrico, onde o Método de *Davidon Fletcher Powell* (DFP) e o Método de *Broydon Fletcher Goldfard Sham* (BFGS) são os métodos mais utilizados.

Método de “*Davidon-Fletcher-Powell*” (DFP).

Davidon [1959] elaborou um dos métodos que determinam a inversa da Hessiana que, posteriormente, foi modificado por Fletcher e Powell [1963], sendo um dos mais eficientes métodos para minimização de uma função geral  $f(\mathbf{x})$ . A atualização  $\mathbf{A}^{k+1}$  por este método é dada pela expressão:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k + \frac{\mathbf{s}^k \otimes \mathbf{s}^{kT}}{(\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k)} - \frac{\mathbf{z}^k \otimes \mathbf{z}^{kT}}{(\mathbf{y}^k \cdot \mathbf{z}^k)} \quad (5.2.31)$$

na qual,

$$\mathbf{S}^k = \alpha_k \cdot \mathbf{d}^k = (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \quad (5.2.32)$$

$$\mathbf{y}^k = \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (5.2.33)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{y}^k \quad (5.2.34)$$

A matriz  $\mathbf{A}^k$  é positiva definida para todo  $k$ . Isto implica que o método sempre converge para um mínimo local.

#### Método “Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno” (BFGS)

Neste método, a matriz Hessiana ou sua inversa são atualizadas a cada iteração, sendo que a primeira iteração é repetida novamente, da mesma forma que no DFP. Para a atualização da aproximação da inversa da Hessiana no método BFGS, consideram-se os mesmos termos iniciais do Método de DFP e acrescenta-se mais uma expressão, resultando em:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k + \frac{\mathbf{s}^k \otimes \mathbf{s}^{kT}}{(\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k)} - \frac{\mathbf{z}^k \otimes \mathbf{z}^{kT}}{(\mathbf{y}^k \cdot \mathbf{z}^k)} + \left[ (\mathbf{y}^k \cdot \mathbf{z}^k) \right] \cdot \mathbf{c}^k \otimes \mathbf{c}^k \quad (5.2.35)$$

$$\mathbf{c}^k = \frac{\mathbf{s}^k}{(\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{y}^k)} - \frac{\mathbf{z}^k}{(\mathbf{y}^k \cdot \mathbf{z}^k)} \quad (5.2.36)$$

Cabe ressaltar que a direção de busca é garantida se o gradiente for realmente de descida para a função objetivo  $f(\mathbf{x}^k)$  e a matriz  $\mathbf{A}^k$  for positiva definida. Quando utilizar métodos numéricos, deve-se programar desvios de segurança para assegurar um bom condicionamento numérico e convergência global do método, evitando que a aproximação da matriz Hessiana torne-se indefinida ou singular.

De maneira geral, a direção de descida é obtida pela Equação (5.2.30) quando for utilizado o Método Variável Métrico. Porém,  $\mathbf{A}^k$  deve ser positiva definida para garantir que  $\mathbf{d}^k$  seja uma direção de descida. Sendo assim, o método de busca unidimensional proporciona a continuidade do processo iterativo através do cálculo do passo  $\alpha$  e da atualização  $\mathbf{x}^k$  através da Equação (5.1.7). Desta forma, é possível alcançar o ponto ótimo e atingir a convergência  $\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| < \varepsilon$ , na qual  $\varepsilon$  é a tolerância adotada.

### 5.2.2 Problemas com Restrição

O problema agora é minimizar funções de  $n$  variáveis sujeitas a um grupo de restrições de igualdade e de desigualdade, a definição genérica destes problemas está definido pelas Equações (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) e (5.1.5), onde tanto a função objetivo, como as restrições podem ser funções não lineares. Muitos conceitos gerais aplicados nos problemas sem restrição também são válidos nos problemas com restrição.

A estratégia aqui adotada será a transformação do problema com restrição em uma sequência de problemas sem restrição. Esta abordagem é conhecida como *SUMT* (*Seqüencial Unconstrained Minimization Techniques*). Serão abordados dois métodos: Método da Função Penalidade Exterior e Método do Lagrangeano Aumentado.

O problema genérico de otimização sujeita a restrição pode ser enunciado da seguinte forma:

Encontrar um vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o qual minimiza a função objetivo:

$$f = f(\mathbf{x}) \quad (5.2.37)$$

sujeita às restrições de igualdade

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 ; \quad i = 1, \dots, l \quad (5.2.38)$$

e às restrições de desigualdade

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 ; \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2.39)$$

Portanto, a transformação do problema de otimização com restrição, definido nas Equações (5.2.37), (5.2.38) e (5.2.39), em um problema sem restrição é realizado através de uma abordagem clássica, criando uma função pseudo objetivo, da seguinte forma:

$$\phi(\mathbf{x}, r) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \cdot P(\mathbf{x}) \quad (5.2.40)$$

onde  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo original e  $P(\mathbf{x})$  é uma função penalidade, cujo parâmetro de controle da penalidade é dado por  $r$ .

#### Método da Função Penalidade Exterior

O Método da Penalidade Exterior é considerado um dos mais fáceis de ser implementado em um algoritmo, pois o mesmo somente penaliza a função objetivo quando

as restrições são violadas. Porém, a técnica de penalização possui desvantagens, principalmente com relação ao mal condicionamento numérico. Para contornar este problema faz-se necessário o uso dos multiplicadores de Lagrange.

As funções de penalidade, ou seja, aquelas que transformam problemas com restrição em um problema sem restrição, são utilizadas pelo Método da Função Penalidade Exterior na solução de um problema com restrições através da solução de uma seqüência de problemas sem restrição. Estas restrições são incorporadas na função objetivo através da função penalidade, permitindo que o problema com restrição seja solucionado através da penalização da violação das restrições. O termo “exterior” refere-se ao fato de que as penalidades são aplicadas somente no lado externo do domínio viável, isto é, o mínimo se aproxima pelo lado externo do domínio da função. Salienta-se a importância do método de penalidade devido à simplificação e clareza do método para solucionar os problemas com restrição. Além disso, pode ser implementado com programas simples que possuem bom grau de generalidade e taxa de convergência lenta.

Diante do problema de minimização com restrição de desigualdade apresentado nas Equações (5.2.37) e (5.2.39), pode-se afirmar que o método de penalidade baseia-se na substituição do problema com restrição por um problema sem restrição, conforme a seguir:

Determinar  $\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^* = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{x}_r^* \quad (5.2.41)$$

onde,  $\mathbf{x}_r^*$  é a solução do problema.

Dado  $r > 0$ , determinar  $\mathbf{x}_r^*$ , tal que

$$\mathbf{x}_r^* = \arg \min f_r(\mathbf{x}) \quad (5.2.42)$$

onde,

$$f_r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left( g_j(\mathbf{x})^+ \right)^2. \quad (5.2.43)$$

A função  $g_j(\mathbf{x})^+$  representa a parte positiva da função  $g_j(\mathbf{x})$  e pode ser expressa como:

$$g_j(\mathbf{x})^+ \equiv \max \{0, g_j(\mathbf{x})\} \quad ; \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2.44)$$

A condição necessária de otimalidade para  $\mathbf{x}_r^*$  é dada por:

$$\nabla f_r(\mathbf{x}_r^*) = \nabla f(\mathbf{x}_r^*) + \frac{2}{r} \sum_{j=1}^m g_j(\mathbf{x}_r^*) \nabla g_j(\mathbf{x}_r^*)^+ \quad (5.2.45)$$

onde,

$$\nabla g_j(\mathbf{x})^+ = \begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}_r^*) & ; \text{ se } g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & ; \text{ se } g_j(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (5.2.46)$$

No caso de ser incluído restrições de igualdade obtêm-se:

Seja  $\mathbf{x}_r^*$  a solução do problema (5.2.37), (5.2.38) e (5.2.39). Então

$$\mathbf{x}^* = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{x}_r^* \quad (5.2.47)$$

onde,  $\mathbf{x}_r^*$  é a solução do problema:

Dado  $r > 0$ , determinar  $\mathbf{x}_r^*$ , tal que,

$$\mathbf{x}_r^* = \arg \min f_r(\mathbf{x}) \quad (5.2.48)$$

onde,

$$f_r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} P(\mathbf{x}) \quad (5.2.49)$$

A função penalidade neste caso possui a forma:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m [g_j(\mathbf{x})^+]^2 + \sum_{i=1}^l [h_i(\mathbf{x})]^2 \quad (5.2.50)$$

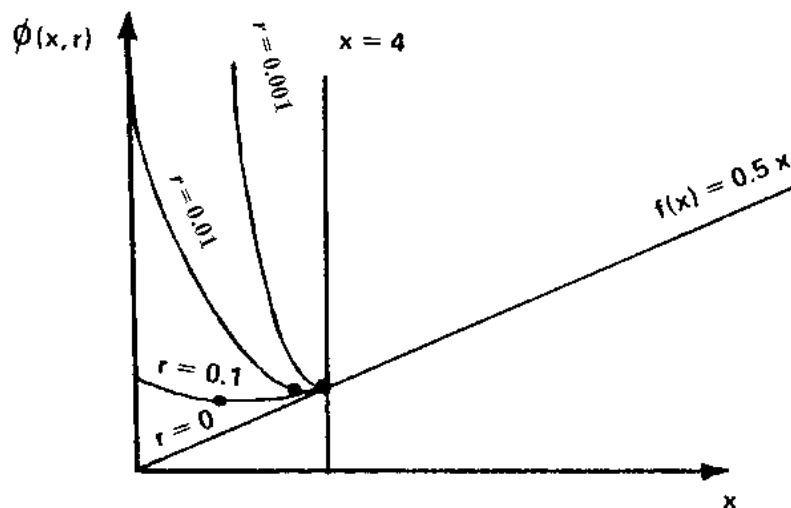


Figura 5.2.3-Influência do parâmetro de penalização

Quanto ao multiplicador  $r$ , este tem a responsabilidade de controlar a magnitude dos termos de penalidade. Se escolhido um valor relativamente pequeno para  $r$ , o resultado da função  $\phi(\mathbf{x}, r)$ , é facilmente minimizado, mas não impede a violação das restrições. Por outro lado, um valor muito pequeno de  $r$  assegurará a satisfação de todas as restrições, mas em geral torna o problema numericamente mal condicionado. Normalmente, inicia-se com um valor relativamente pequeno para minimizar  $\phi(\mathbf{x}, r)$ , então  $r$  é reduzido gradualmente, sendo  $\phi(\mathbf{x}, r)$  minimizado até obter-se um resultado satisfatório. Pode-se através da Figura (5.2.3), ter idéia da evolução da função em relação ao parâmetro  $r$ . Pode-se notar que, como  $r$  é reduzido de um valor inicial, então  $\phi$  move-se no intervalo fechado das restrições de contorno. Entretanto, a curvatura de  $\phi$ , próximo do mínimo também aumenta. O valor alto da curvatura associada com o valor muito reduzido de  $r$ , muitas vezes conduz a dificuldade numérica. Usando-se uma seqüência de valores de  $r$ , a localização do mínimo pode ser obtida a partir de um valor inicial de  $r$ , como ponto de partida para a busca, sendo o seu valor reduzido gradativamente até que a posição de mínimo seja identificada, quando então o  $r$ , é limitado de forma que,  $r < r_{min}$ . Assim o mal condicionamento associado com a curvatura grande é contrabalançado pela disponibilidade de um bom ponto de início.

De acordo com Arora [1994], o método de penalidade possui algumas vantagens e desvantagens. Como vantagem o método é aplicável para problemas genéricos com restrição, abrangendo tanto de igualdade quanto as de desigualdades e também o ponto inicial pode ser arbitrário. Porém como desvantagem, o método itera através do domínio inviável onde o problema pode estar indefinido e caso o processo iterativo seja concluído de forma prematura, o ponto de mínimo pode violar as restrições.



## Método do Lagrangeano Aumentado – MLA

A utilização de funções de penalidade exterior pode ser considerada um método eficiente na resolução de um problema de mínimo com restrições. Entretanto, o processo de otimização pode ser melhorado de forma significativa, através da inclusão dos multiplicadores de Lagrange. Sendo assim, é possível reduzir a dependência da escolha do parâmetro de controle da penalidade, bem como sua atualização. Conforme apresentado anteriormente, este fato pode ocasionar problemas de mal condicionamento numérico.

O Método do Lagrangeano Aumentado (MLA) pode ser visto como uma combinação do uso de multiplicadores de Lagrange com as funções de penalização.

Inicialmente, apresenta-se o método para as condições de restrições de igualdade. Após isso, realiza-se uma extensão para o problema com restrições de desigualdade e, finalmente, a combinação de ambos para a solução de problema genérico de otimização com restrição.

### I. Problemas com Restrição de Igualdade

A princípio, o MLA foi desenvolvido para problemas com restrições de igualdade cuja forma é expressa a seguir:

Minimizar

$$f(\mathbf{x}) \quad (5.2.51)$$

sujeito a

$$h_i(\mathbf{x}) = 0; \quad i = 1, \dots, l \quad (5.2.52)$$

Define-se então a função lagrangeana associada ao problema como:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \quad (5.2.53)$$

Nota-se que se existir algum  $\lambda^*$ , para o qual  $\mathbf{x}^*$  é solução do problema sem restrição, tal que,

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda^*), \quad (5.2.54)$$

enquanto forem satisfeitas as condições  $h_i(\mathbf{x}) = 0$ , então  $\mathbf{x}^*$  é solução do problema descrito pelas Equações (5.2.51) e (5.2.52). Portanto o problema

$$\min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \lambda), \quad \lambda \text{ conveniente}, \quad (5.2.55)$$

sujeito à

$$h_i(\mathbf{x}) = 0; \quad i = 1, \dots, l \quad (5.2.56)$$

equivale ao problema original. Utilizando, neste momento, o método da penalidade exterior e incorporando à função lagrangeana o termo de penalidade, será possível criar uma função pseudo-objetiva expressa por:

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^l [h_i(\mathbf{x})]^2; \quad r \rightarrow 0 \quad (5.2.57)$$

que é denominada função lagrangeana aumentada. Portanto, dado  $\lambda$  e  $r$ , a solução do problema sem restrição  $\mathbf{x}(\lambda, r)$ , consiste em aplicar um algoritmo que resolva a equação. Os parâmetros  $\lambda$  e  $r$  são convenientemente reajustados e o processo segue iterativamente até a convergência.

Citam-se algumas características da função Lagrangeana aumentada, tais como:

1)- Se  $\lambda_i = 0$ , então a Equação (5.2.57) reduz-se ao método de penalidade exterior. Ao decrescer  $r$  gradualmente a seqüência de soluções  $\mathbf{x}(r) \rightarrow \mathbf{x}^*$ , as soluções intermediárias não são viáveis e de um modo geral, o problema fica mal condicionado se  $r < r_{\text{crítico}}$ . Portanto, é utilizado um valor mínimo para o parâmetro de penalização:  $r_{\text{min.}} = r_{\text{crítico}}$

2)- Se  $\lambda_i = \lambda_i^*$ , onde  $\lambda_i^*$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados ao critério de otimalidade em  $\mathbf{x}^*$ , isto é, as condições necessárias de K-T, então o mínimo da função (5.2.57) independe do valor de  $r$ . Assim a condição de otimalidade em  $\mathbf{x}^*$  é

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}, \lambda^*, r) \Big|_{\mathbf{x}^*} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}^*)}_{KT} + \frac{2}{r} \cdot \sum_{i=1}^l h_i(\mathbf{x}^*) \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (5.2.58)$$

De maneira prática, estas características possibilitam avaliar a questão relacionada à atualização de  $\lambda_i$ , até atingir-se  $\lambda_i^*$ . Sabe-se que a determinação do mínimo depende da escolha do multiplicador de Lagrange, tornando-se desnecessária a atribuição de um valor muito baixo para  $r$ , o que poderia ocasionar um mal condicionamento. O método baseia-se em uma estimativa de  $\lambda$ , quando a mesma for adequada. O mínimo é atingido sem a

necessidade de se utilizar um valor muito baixo para  $r$ . Uma forma de se obter a estimativa para os multiplicadores de Lagrange consiste na comparação da condição de otimalidade da função (5.2.57), dada por:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}, \lambda, r) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \left( \lambda_i + \frac{2}{r} h_i(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.2.59)$$

Com a condição de estacionaridade de  $L(\mathbf{x}, \lambda)$  em  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^l \lambda_i^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (5.2.60)$$

obtendo, no limite onde  $\mathbf{x}(\lambda, r) \rightarrow \mathbf{x}^*$ , a expressão

$$\lambda_i + \frac{2}{r} \cdot h_i(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda_i^* \quad (5.2.61)$$

A partir deste resultado pode-se propor a seguinte expressão como estimativa para  $\lambda_i$ , associados às restrições de igualdade.

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \frac{2}{r^k} \cdot h_i(\mathbf{x}^k); \quad i = 1, \dots, l \quad (5.2.62)$$

## II. Problemas com Restrição de Desigualdade

O problema considerado é:

Minimizar

$$f(\mathbf{x}) \quad (5.2.63)$$

sujeito à :

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2.64)$$

onde o conjunto de restrições inclui também as restrições laterais, Equação (5.1.4).

No entanto, é possível reescrever o problema de forma equivalente a um problema com restrição de igualdade. Esta conversão é realizada mediante a introdução de uma variável denominada variável de folga ou relaxação (*“slack variable”*) na condição de restrição. Logo, o problema toma a forma:

minimizar

$$f(\mathbf{x}) \quad (5.2.65)$$

sujeito a:

$$g_j(\mathbf{x}) + z_j^2 = 0 \quad ; \quad j=1, \dots, m \quad (5.2.66)$$

onde  $z_j$  é a variável de relaxação associada à restrição de desigualdade.

Neste momento, tem-se um problema semelhante aos problemas com restrição de igualdade. Baseados nos resultados associados à restrição de igualdade da Equação (5.2.57), podem-se aplicar as restrições de desigualdade para gerar uma nova função Lagrangeana aumentada na forma:

$$\Psi(\mathbf{x}, \mu, z, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j (g_j(\mathbf{x}) + z_j^2) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m (g_j(\mathbf{x}) + z_j^2)^2 \quad (5.2.67)$$

cujo  $\mu_j \geq 0$  é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de desigualdade. Nota-se um aumento considerável no número de variáveis de projeto com inclusão da variável de relaxação  $z_j$ . Porém, a imposição de estacionaridade da Equação (5.2.67) com relação a  $z_j$ , permite a eliminação desta variável. Para fazer isto, aplica-se a condição necessária de ótimo para a função Lagrangeana aumentada derivando-a em relação a  $z_j$  então:

$$\nabla_z \Psi(\mathbf{x}, \mu, z, r) = 0 \quad ; \quad j=1, \dots, m \quad (5.2.68)$$

de onde se conclui que

$$z_j^2 = 0 \quad \text{ou} \quad z_j^2 = -\frac{r\mu_j}{2} - g_j(\mathbf{x}) \quad (5.2.69)$$

Portanto, se obtém

$$z_j^2 = \max \left[ 0 ; -\frac{r\mu_j}{2} - g_j(\mathbf{x}) \right] \quad (5.2.70)$$

Isto satisfaz a condição necessária de otimalidade, tornando  $z_j$  uma variável independente. Então, pode-se eliminar  $z_j$  de  $\Psi(\mathbf{x}, \mu, z, r)$  através da utilização da Equação (5.2.70) somando  $g_j(\mathbf{x})$  em ambos os lados, de forma que,

$$g_j(\mathbf{x}) + z_j^2 = \max \left[ g_j(\mathbf{x}) ; -\frac{r\mu_j}{2} \right] \quad ; \quad j=1, \dots, m \quad (5.2.71)$$

Fazendo a substituição da Equação (5.2.71) na Equação (5.2.67), obtém-se:

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m M_j(\mathbf{x}, \lambda_j, r) \quad (5.2.72)$$

na qual,

$$M_j(\mathbf{x}, \mu_j, r) = \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) (g_j(\mathbf{x}) + \mu_j r) & ; \quad se \quad g_j(\mathbf{x}) \geq -\frac{r\mu_j}{2} \\ -\left(\frac{r\mu_j}{2}\right)^2 & ; \quad se \quad g_j(\mathbf{x}) < -\frac{r\mu_j}{2} \end{cases} \quad (5.2.73)$$

A Equação (5.2.72) possui derivadas de primeira ordem contínuas com relação a  $\mathbf{x}$ , assim  $\Psi(\mathbf{x}, \lambda, r)$  é resolvida da mesma maneira que no caso do problema com restrição de igualdade.

O multiplicador de Lagrange é atualizado pela expressão

$$\mu_j^{k+1} = \max \left[ 0, \mu_j^k + \frac{2}{r^k} g_j(\mathbf{x}^k) \right] \quad ; \quad j = 1 \dots m \quad (5.2.74)$$

### III. Problema Genérico

A combinação dos dois últimos problemas, isto é, restrição de igualdade e restrição de desigualdade permite criar o Método Lagrangeano Aumentado para o caso genérico expresso por:

$$\Psi(x, \mu, \lambda, r) = f(x) + \sum_{j=1}^m \left\{ \mu_j (g_j(x) + z_j^2) + \frac{1}{r} (g_j(x) + z_j^2)^2 \right\} + \sum_{i=1}^l \left\{ \lambda_i h_i(x) + \frac{1}{r} (h_i(x))^2 \right\} \quad (5.2.75)$$

A atualização dos multiplicadores de Lagrange  $\mu_j^{k+1}$  e  $\lambda_i^{k+1}$ , é dada, respectivamente, pelas Equações (5.2.74) e (5.2.62).

O Método do Lagrangeano Aumentado genérico possui algumas características que são destacadas por Vanderplaats [1984], tais como:

1. O método é relativamente independente do valor de  $r$ , isto é, não é necessário que  $r$  tenda a zero;
2. É possível contemplar  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$  e  $h_i(\mathbf{x})=0$ ;
3. Realiza aceleração da convergência através da atualização dos multiplicadores de Lagrange;
4. O ponto inicial pode estar em qualquer região viável ou inviável;
5. No ponto ótimo,  $\mu_j^* \neq 0$ , automaticamente identifica o conjunto de restrições ativas.

A Figura (5.2.4) apresenta o fluxograma para o algoritmo do Método do Lagrangeano Aumentado genérico.

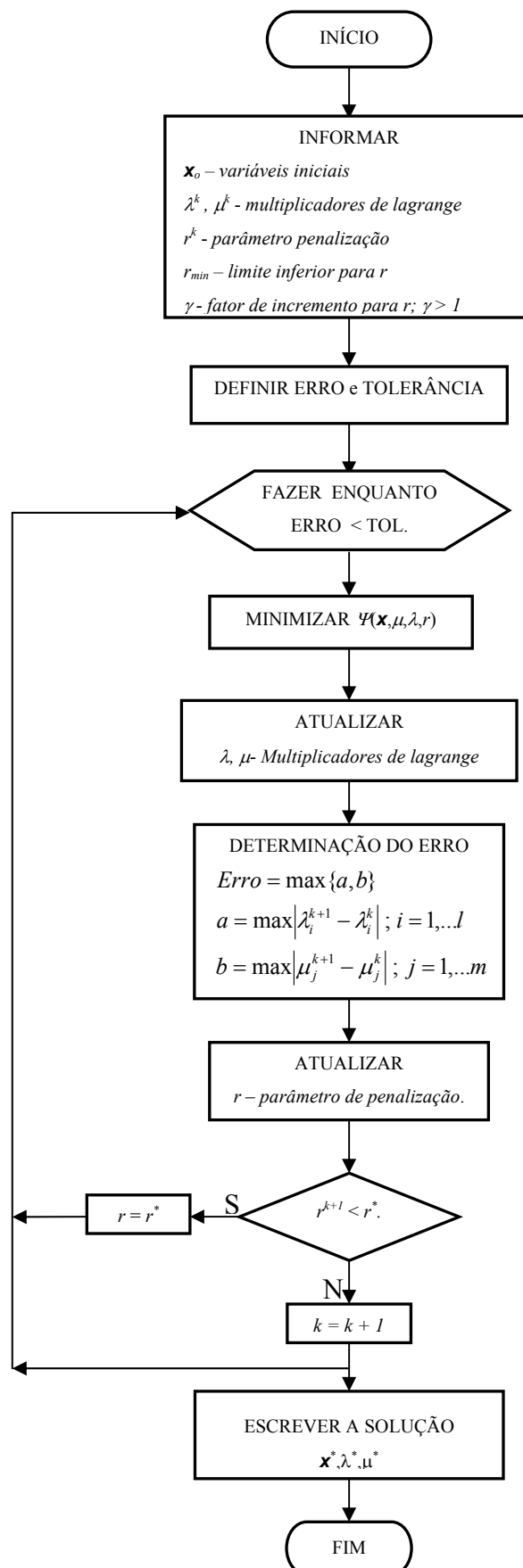


Figura 5.2.4 – Fluxograma para o Método Lagrangeano Aumentado.

### 5.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Para a utilização de algoritmos de otimização, é necessário o cálculo do gradiente da função objetivo e das restrições. A determinação destes gradientes requer a determinação da análise de sensibilidade da resposta da estrutura.

No estudo da otimização, calcula-se a primeira derivada da função objetivo  $f(\mathbf{x})$  e funções restrições  $g(\mathbf{x})$  com relação às variáveis de projeto ( $\mathbf{x}$ ). Para a determinação destas derivadas é necessária a determinação das derivadas das variáveis de estado do sistema, tais como do campo de deslocamentos e tensão. Tais equações são conhecidas como Análise de Sensibilidade.

Ao adotar, por exemplo, como função objetivo o peso total da estrutura, o problema de estabelecer o melhor projeto consiste em determinar as variáveis de projeto de tal modo que a estrutura tenha o menor peso e ainda satisfaça a equação de equilíbrio  $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ , que é considerada uma das restrições de igualdade do problema de otimização estrutural. Existem ainda outras restrições que são devido a deslocamentos, deformações e tensões. Assim, para resolver um problema de mínimo necessita-se determinar ao longo do processo iterativo as seguintes informações:  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$ , e seus respectivos,  $\nabla f(\mathbf{x})$  e  $\nabla g(\mathbf{x})$ . Pode-se então fazer uso de técnicas de programação matemática para obter uma rotina sistemática de cálculo que resolva o problema de otimização. Para o cálculo das derivadas existem alguns métodos os quais se classificam em analíticos, semi-analíticos e numéricos.

Os métodos mais usuais para a Análise de Sensibilidade são: método direto, adjunto, semi-analítico e o método das diferenças finitas. Este último tem sua importância neste trabalho pela simplicidade de implementação e flexibilidade com relação à equação de estado, o que o torna bastante genérico. Primeiramente, é dado de forma genérica uma abordagem dos métodos analíticos e o semi-analítico por sua importância no contexto.

#### Método Direto

O método direto é considerado um método analítico. Para ilustrar o método é tomada como ponto de partida a equação de estado definida anteriormente na Equação (3.5.46), a qual representa por simplicidade um problema linear, onde estão presentes os parâmetros físicos, geométricos, e mecânicos. Assim como a matriz de rigidez, onde estão todas as características da estrutura, depende das variáveis de projeto, o vetor carga também pode depender das variáveis de projeto, por exemplo, quando é considerado o peso próprio da estrutura. Deste modo se reescreve a Equação (4.46) da seguinte forma:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (5.3.1)$$

A discussão é iniciada através da definição da função objetivo do problema, que se apresenta, genericamente, como sendo:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{U}(\mathbf{x})) \quad (5.3.2)$$

Usando a regra da cadeia para a diferenciação da Equação (5.3.2) para obter o gradiente da função objetivo, se obtêm:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{U}_k} \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial x_i}; \quad i = 1, \dots, m \quad m - \text{núm. de variáveis de projeto} \quad (5.3.3)$$

$k=1..l$ , em que  $l$  representa o número de graus de liberdade da estrutura. A Equação (5.3.3) pode ser reescrita da forma:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + [\nabla \mathbf{U}]^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \quad (5.3.4)$$

Para calcular o gradiente da função objetivo é necessário calcular o gradiente dos deslocamentos. Para determinar  $\nabla_x \mathbf{U}$ , isto é, a resposta de  $\mathbf{U}$  com relação às variáveis de projeto  $\mathbf{x}$ , utiliza-se a equação de estado definida pela Equação (5.3.1), e diferenciando ambos os lados desta equação com relação as variáveis de projeto, obtém-se:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{x})] \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} + \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \{\mathbf{U}\} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right] \quad (5.3.5)$$

reordenando os termos:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{x})] \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\} - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \{\mathbf{U}\} \quad (5.3.6)$$

onde  $\nabla \mathbf{U}$  é dado por

$$\nabla_{x_i} \mathbf{U} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} = [\mathbf{K}(\mathbf{x})]^{-1} \left[ \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\} - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \{\mathbf{U}\} \right] \quad (5.3.7)$$

e  $[\mathbf{K}(\mathbf{x})]^{-1}$  é o inverso da matriz de rigidez global em análise estrutural. O método direto consiste em resolver o sistema de equações dado pela Equação (5.3.6). A solução do sistema expresso por  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}$ , juntamente com os termos  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}_k}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , permite determinar a derivada total de  $f(\mathbf{x})$ . O mesmo deve ser feito com  $g_j$ ;  $j = 1, \dots, n$  (número de restrições).

Para determinar as expressões analíticas referentes aos cálculos dos gradientes, são necessários detalhes das expressões da matriz de rigidez da equação de estado. Entretanto, em muitos programas comerciais esta informação detalhada da estrutura do programa não está disponível para o usuário. Portanto, o cálculo exato pela derivada analítica utilizando o método direto é tipicamente implementado por quem tem acesso ao código de elementos finitos, os quais têm profundo conhecimento dos detalhes da estrutura



do programa. Um outro método analítico, o método adjunto, abordado a seguir, também apresenta esta mesma restrição para uso no procedimento proposto.

### Método Adjunto

Seja  $\mu$  uma variável adjunta, tomando como base a Equação (5.3.4) e  $g(\mathbf{x}, \mathbf{U}(\mathbf{x}))$  a função restrição. Para se determinar  $\nabla g(\mathbf{x})$ , considera-se a Equação (5.3.1), cuja diferenciação fornece:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{x})] \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\} - \left[ \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \{\mathbf{U}\} \quad (5.3.8)$$

então,

$$\left\langle \mu, [\mathbf{K}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} \right\rangle = \left\langle \mu, \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\} \right\rangle - \left\langle \mu, \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right] \mathbf{U} \right\rangle; \quad i = 1 \dots m \text{ (num. variáveis de projeto)} \quad (5.3.9)$$

portanto,

$$\left\langle [\mathbf{K}]^T \mu, \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} \right\rangle = \left\langle \mu, \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\} \right\rangle - \left\langle \mu, \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right] \mathbf{U} \right\rangle; \quad i = 1 \dots m \quad (5.3.10)$$

É necessário determinar a seguinte condição:

$$\frac{dg_j(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{U}_k} \frac{\partial \mathbf{U}_k}{\partial x_i}; \quad i = 1, \dots, n; \text{ núm. de variáveis de projeto.} \quad (5.3.11)$$

$j = 1, \dots, m; \text{ núm. de inequações e } k = 1 \dots l.$

Desta forma, se define:

$$[\mathbf{K}]^T \mu^j = - \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{U}} \Rightarrow \left\langle \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{U}}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle [\mathbf{K}]^T \mu^j, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \mu^j, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \mu^j, \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right] \mathbf{U} \right\rangle \quad (5.3.12)$$

Assim, a Equação (5.3.12) pode ser reescrita como sendo:

$$\frac{dg_j}{dx_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - \mu_s^j \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x_i} \right\} + \mu_s^j \left[ \frac{\partial \mathbf{K}_{sk}}{\partial x_i} \right] \mathbf{U}_k; \quad j = 1, \dots, m$$

(5.3.13)

$s = 1, \dots, l$   
 $k = 1, \dots, l$   
 $i = 1, \dots, n$

O objetivo é a determinação da seguinte condição:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{x})]^T \mu^j = -\frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{U}} \quad (5.3.14)$$

Algumas observações devem ser consideradas:

- se o número de variáveis de projeto  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  é bem menor que o conjunto de restrições definindo a região factível de projeto, então o método direto é mais eficiente;
- se  $g_j$ , onde  $j = 1, \dots, m$  é um conjunto pequeno, então o método adjunto é mais eficiente;

A determinação da derivada pelo método analítico é a ideal para se obter o valor exato da derivada para as funções objetivo e restrições. Como as funções são implícitas em relação à variável de estado  $\mathbf{U}$ , e isto requer o conhecimento do programa de elementos finitos. Mas, até mesmo nos casos em que as funções objetivo e restrições são explicitamente expressas nas variáveis de estado e variáveis de projeto, a utilização da forma acima para determinar os gradientes das funções não é a ideal. A primeira derivada da matriz de rigidez global  $[\mathbf{K}]$  da equação de equilíbrio pode se apresentar de forma bastante complexa.

### Método Semi Analítico

Este método faz uso do método analítico e do método de diferenças finitas para determinação do gradiente das funções objetivo e restrições, e também a Equação (5.3.1), entretanto, a diferenciação da matriz  $[\mathbf{K}]$  e do vetor  $\mathbf{F}$  com relação às variáveis de projeto para determinar  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}$  é feito por diferenças finitas. Portanto, tem a vantagem de ser mais fácil

de implementar do que o método analítico (direto e adjunto), mas ainda requer o conhecimento de detalhes do programa de elementos finitos. Um exemplo interessante que ajuda a entender este método pode ser o caso de uma estrutura de casca 3-D. Neste caso a derivada analítica da matriz  $\mathbf{K}$  com relação a uma coordenada nodal de um nó pode não ser obtida de uma forma simples. Para a formulação de casca no método de elementos finitos se utiliza um sistema de coordenadas local associada a cada elemento finito que é definido pelas coordenadas locais dos quatros nós dos vértices do elemento. A matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}_{local}$  é transformada para um  $\mathbf{K}_{global}$  no sistema de coordenada global da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_{global}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{local}^e \mathbf{R} \quad (5.3.15)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz transformação do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global. Assim, a primeira derivada da matriz de rigidez é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{global}^e}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \right)^T \mathbf{K}_{local}^e \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{local}^e}{\partial x_i} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{local}^e \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \quad (5.3.16)$$

Esta é a primeira derivada de ambas as matrizes de transformação de coordenadas e de rigidez, calculadas analiticamente. Entretanto, na prática não é viável computar a derivada da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{global}^e$  de forma analítica. Isto conduz ao uso de diferenças finitas (*central*, *forward*, e *backward*) para computar a derivada do operador  $\mathbf{K}$  da equação de estado, da forma:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\mathbf{K}|_{x+\Delta x e_i} - \mathbf{K}|_{x-\Delta x e_i}}{2 \cdot \Delta x}; \quad D.F. Central \quad (5.3.17)$$

onde,  $\Delta x$  é uma suficientemente pequena mudança nas variáveis de projeto corrente. Do mesmo modo para o vetor de carga:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \frac{\mathbf{F}|_{x+\Delta x e_i} - \mathbf{F}|_{x-\Delta x e_i}}{2 \cdot \Delta x} \quad (5.3.18)$$

Esta aproximação leva a um método semi-analítico para computar a sensibilidade de projeto. Então, da Equação (5.3.1), se obtêm:

$$\nabla_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right\} \approx \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} \left( [\mathbf{K}(x_i)]^{-1} \left( \frac{\mathbf{F}|_{x+\Delta x e_i} - \mathbf{F}|_{x-\Delta x e_i}}{2 \Delta x_i} - \left[ \frac{\mathbf{K}|_{x+\Delta x e_i} - \mathbf{K}|_{x-\Delta x e_i}}{2 \Delta x_i} \right] \{ \mathbf{U} \} \right) \right) \quad (5.3.19)$$

Este procedimento, no entanto, do mesmo modo que para o método analítico necessita de acesso direto ao código de origem do MEF, pelo menos acesso a matriz de rigidez e vetor de carga, para computar de forma eficiente o cálculo de  $\nabla_x \mathbf{U}$ , que permitirá determinar  $\nabla_x f$  e  $\nabla_x g$ .

### Método de Diferenças Finitas

O procedimento genérico de otimização integrado com programa comercial, pode ser muito mais simples se aplicar a aproximação por diferenças finitas para computar a sensibilidade das funções objetivo e restrições, pois não se tem a necessidade dos detalhes do código fonte do programa comercial. E também a forma explícita da função  $f$  e  $g$  em  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{U}$  não é requerida, bem como a primeira derivada de  $\mathbf{K}$  matriz de rigidez da equação de estado não necessita ser calculada. A desvantagem deste método é precisar de no mínimo duas análises do programa comercial por variável de projeto para computar o gradiente da função objetivo, se for utilizado o método das *diferenças finitas centrais*. Assim, se  $n$  funções

e  $m$  variáveis de projeto estão envolvidos no problema,  $(2m+1)n$  análises são necessárias para computar a derivada das funções restrições e objetivo.

Caso o número de variáveis de projeto seja grande como em problemas de otimização dimensional para estruturas aeroespaciais, o método de diferenças finitas não é uma boa prática. Entretanto, se o número de variáveis de projeto é um tanto reduzido, ele torna-se poderoso. O que se encontra na prática, é que em muitos problemas de projeto mecânico o número de variáveis de projeto é pequeno, devido o custo para controle das variações.

Não é necessário nenhum desenvolvimento especial para que o método das diferenças finitas seja aplicado, enquanto que os métodos analítico e semi-analítico necessitam consideráveis esforços para o desenvolvimento do código e implementação, e há necessidade de conhecer o código de elementos finitos. Além disso, o uso de diferenças finitas permite trabalhar com problemas multidisciplinares, por exemplo, se a forma de uma estrutura é otimizada pela minimização do arraste gerado pelo fluxo de um fluido externo a estrutura, considerando os efeitos da máxima tensão da estrutura e deformações, existe a necessidade de se calcular os gradientes das funções nas duas diferentes condições, isto é, nas duas diferentes equações de estado. Então, como os programas de análises para tensão e fluido são em geral não integrados num único programa, logo a determinação dos gradientes de  $f$  e  $g$  pelos métodos analítico e semi-analítico torna-se muito complexo para atender aos dois problemas, já que são fontes de dados diferentes. Entretanto, o método de diferenças finitas pode ser aplicado para os mais diferentes tipos de equação de estado, juntamente com um programa comercial existente no ambiente de projeto, permitindo determinar diretamente as derivadas das funções objetivo e restrições sem grandes complicações na implementação das rotinas que efetuam os cálculos. A flexibilidade do método de diferenças finitas para o cálculo das derivadas é muito significativa.

Além disso, num ambiente de rede, pode ser possível usar vários computadores simultaneamente, para computar os cálculos das derivadas, Kikuchi e Horimatsu [1994]. Isto implica a possibilidade de usar dois ou três computadores para fazerem as análises ao mesmo tempo, como um processamento paralelo. Por exemplo, em uma dos computadores se faria a análise da equação de estado na perturbação do projeto  $\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}$ , enquanto um outro computador analisa na configuração  $\mathbf{x}-\Delta\mathbf{x}$ . Deste modo, a determinação das derivadas se efetua sem aguardar por um longo tempo que, normalmente, é preciso quando usado somente um computador.

Kikuchi e Horimatsu [1994], enumeram algumas condições nas quais o método de diferenças finitas é o mais apropriado para calcular as derivadas das funções, considerando alguns problemas práticos de otimização estrutural:

- o tempo de computação pode ser excessivo, quando o número de variáveis de projeto é grande, isto é, maior que 10 variáveis de projeto;
- o sistema de otimização de projeto pode ser muito flexível, porque pode ser usado qualquer tipo de programa de análise de engenharia, isto é, para qualquer equação de estado inclusive em problemas não lineares;
- a dimensão do programa a ser desenvolvido para o sistema de otimização de projeto é muito pequena e de fácil manutenção;
- o computador usado para modelagem e modificação de projeto não necessita ser o mesmo usado para os cálculos das derivadas num ambiente de rede.

O gradiente das funções feito pelo método de diferenças finitas, usa o seguinte procedimento:

*Seleciona o método de diferenças finitas:*

(1) *central*;    (2) *forward*.

$$x = x^0$$

$$\text{Calcula } f_v = f(x^0)$$

*Define o incremento: h*

$$\text{Calcula } x_{ph} = x^0 + h$$

*Caso 1:*

$$\text{Calcula } x_{ps} = x^0 - h$$

$$h = x_{ph} - x_{ps}$$

*Loop 1:*

$$x(j) = x_{ph}(j)$$

$$\text{Calcula } f_h = f(x)$$

$$\text{Calcula } x(j) = x_{ps}(j)$$

$$\text{Calcula } f_s = f(x)$$

$$\text{Calcula } \text{grad}f(j) = [f_h - f_s] / h(j)$$

$x(j) = x^0(j)$   
*fim loop1*

Caso 2:

$$h = x_{ph} - x^0$$

Loop 2:

$$x(j) = x_{ph}(j)$$

$$\text{Calcula } f_h = f(x)$$

$$\text{Calcula } \text{grad}f(j) = [f_h - f_v] / h(j)$$

$$x(j) = x^0(j)$$

*Fim loop2*

Neste procedimento estão implementados dois dos métodos de diferenças finitas: o método *forward* e o *central*. No primeiro caso, a expressão para determinar a derivada é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} e_i) - f(\mathbf{x})}{\Delta x_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{número de variáveis de projeto} \quad (5.3.20)$$

Conhecido o valor no ponto corrente  $\mathbf{x}$ , este método requer o cálculo da função no ponto  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} e_i$ , para encontrar o valor da derivada. Entretanto, foi aplicado para este procedimento o método de diferenças finitas central, embora este necessite mais tempo de computação, mas em alguns testes a diferença é significativa, quanto à precisão, no valor da aproximação do gradiente de  $f$ . Para encontrar a aproximação da derivada parcial de  $f$  é dada à expressão:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} e_i) - f(\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x} e_i)}{2\Delta x_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad \text{número de variáveis de projeto} \quad (5.3.21)$$

Esta expressão requer além do cálculo da função em  $\mathbf{x}$ , que seja calculada mais duas vezes. O tempo, apesar de ser relativamente longo, é preferível no uso deste método pelo grau de precisão que se obtém, já que a direção de descida é fator importante no processo de otimização e, como já foi mencionado, ela depende fundamentalmente de uma boa precisão no cálculo da derivada numérica.

O valor da perturbação  $\Delta \mathbf{x}$ , é muito importante para o cálculo dos gradientes, normalmente, para um valor de 0.1% tem resultados satisfatórios. Maiores detalhes sobre a

especificação de valor da perturbação nas variáveis de projeto, pode se encontrar em Gill, Murray e Wright [1981].

#### 5.4 OTIMIZAÇÃO EM CONCRETO ARMADO

O projeto de estruturas em concreto armado, assim como outros problemas de engenharia, pode ter diversas prioridades, como minimizar o tempo de execução, reduzir dimensões, menor massa, menor área de fôrma, mínimo peso de aço, mas geralmente o objetivo principal é alcançar o menor custo.

Equacionar o custo total de uma estrutura, com todas as variáveis e restrições do problema e também as relações implícitas, para então encontrar o custo ótimo por algum método de otimização, é uma tarefa bastante árdua e muitas vezes inviável. Uma solução alternativa pode ser a divisão do problema principal em vários subproblemas que possam ser equacionados de uma maneira mais simples para a otimização. Entretanto, devido às relações implícitas, não se pode garantir que os valores encontrados nas soluções ótimas dos subproblemas sejam de fato os valores para o ótimo global. Mas, em função do tempo e ferramentas disponíveis, esta pode ser a única alternativa para viabilizar a otimização.

Em uma estrutura de concreto armado modelada por elementos finitos, se for conhecido o custo de cada elemento, o custo total da estrutura será a somatória do custo dos elementos. Para um elemento de concreto armado a função custo pode ser generalizada da seguinte maneira:

$$C_e = V_c C_c + P_a C_a + A_f C_f \quad (5.4.1)$$

Onde:

$C_e \rightarrow$  Custo do elemento

$V_c, C_c \rightarrow$  Volume e custo do concreto por unidade de volume

$P_a, C_a \rightarrow$  Peso e custo do aço para concreto armado por unidade de peso

$A_f, C_f \rightarrow$  Área e custo de fôrma por unidade de área

Portanto, cada elemento deve armazenar informações de volume de concreto, peso de aço e área superficial do elemento que será envolvida pela fôrma. As informações referentes ao volume de concreto e área de fôrma já estão disponíveis após a entrada de dados para a solução por elementos finitos. A informação referente ao peso de aço estará disponível somente após o pós-processamento. Devem-se determinar as solicitações atuantes em cada elemento e então calcular a armadura necessária para equilibrar estas solicitações.

A composição do custo unitário do concreto, aço e fôrma deve ser a mais completa possível, considerando material, mão-de-obra, tempo de equipamento e outras informações

relevantes. Na maioria dos casos, estes custos unitários apresentam variabilidades, mas podem ser considerados constantes para uma obra específica, com precisão aceitável.

As variáveis de projeto e funções restrições podem ser definidas conforme a finalidade do elemento: laje, viga, pilar, bloco de fundação ou os elementos de fundação como estacas e tubulões. As funções restrições também são definidas pelos valores mínimos ou máximos prescritos em norma, podem ser restrições de geometria, deformação, taxa de aço ou qualquer outra restrição que possa ser matematicamente modelada.

Como exemplos, seguem alguns valores geométricos mínimos para concreto armado, conforme a NBR 6118 e NBR 7187:

1. Lajes maciças:
  - a. Lajes destinadas à passagem de tráfego ferroviário:  $h \geq 20$  cm;
  - b. Lajes destinadas à passagem de tráfego rodoviário:  $h \geq 15$  cm;
  - c. Demais casos:  $h \geq 12$  cm.
2. Lajes nervuradas, Figura (5.3.1a):
  - a. Espessura da mesa  $h_f \geq 10$  cm ou  $h_f \geq a / 12$ , sendo  $a$  a distância entre eixos das nervuras;
  - b. Distância entre eixos das nervuras  $a \leq 150$  cm;
  - c. Espessura da alma das nervuras  $b \geq 12$  cm.
3. Lajes ocas, Figura (5.3.1a):
  - a. Devem ser observados os mesmos limites especificados no item 2;
  - b. Espessura da mesa inferior  $b_i \geq 8$  cm.
4. Vigas:
  - a. Seção retangular e nervuras das vigas de seção T, duplo T ou celular concretadas no local:  $b_w \geq 20$  cm;
  - b. Vigas pré-moldadas de seção T ou duplo T:  $b_w \geq 12$  cm.
5. Pilares:
  - a. Pilares maciços  $b \geq 40$  cm ou  $b \geq 1/25$  da altura livre;
  - b. Para seção transversal celular, a espessura das paredes não deve ser inferior a 20 cm, se for previsto execução com fôrmas deslizantes, a espessura mínima deve ser 25 cm, através de acréscimos nos cobrimentos de 2,5 cm, não sendo permitido considerar tais acréscimos no dimensionamento.
6. Paredes estruturais:
  - a. A espessura da parede estrutural  $b \geq 20$  cm ou  $b \geq 1/25$  da altura livre.



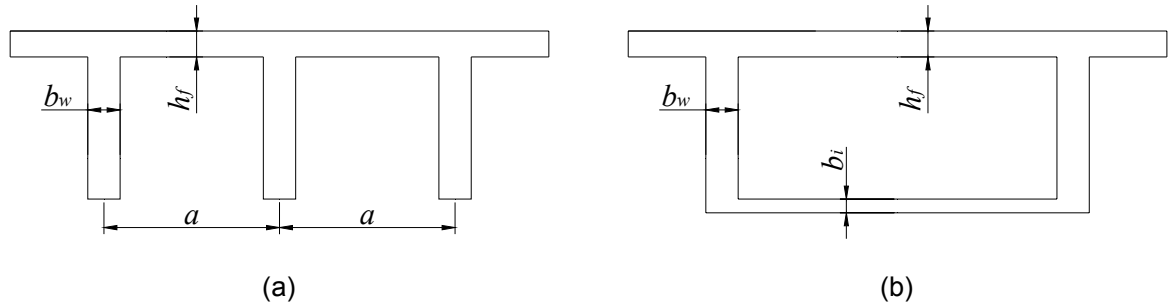


Figura 5.3.1 – Seções de concreto armado

### Vigas de concreto

A restrição da taxa de armadura  $\rho$  nas vigas, definida como a razão entre a área de aço e área de concreto, deve ser maior que 0,15% e inferior a 4%. Assim:

$$0,15\% \leq \rho = \frac{A_s}{A_c} \leq 4\% \quad (5.4.2)$$

Neste trabalho, a função objetivo foi definida como o custo de uma seção de concreto armado por unidade de comprimento. Foram desenvolvidas seções com geometria circular e retangular, sendo definida como a variável de projeto, o diâmetro da seção circular ou a altura da seção retangular. Desta forma, a função objetivo e as funções de restrições, Equações (5.4.1) e (5.4.2), são reescritas da seguinte forma:

Seção circular:

$$f(\mathbf{x}) \Rightarrow C_e = \frac{\pi D^2}{4} C_c + A_s(D) \gamma_s C_a + \pi D C_f \quad (5.4.3)$$

$$g_1(\mathbf{x}) \Rightarrow \frac{4 A_s(D)}{\pi D^2} - 0,04 \leq 0 \quad (5.4.4)$$

$$g_2(\mathbf{x}) \Rightarrow 0,0015 - \frac{4 A_s(D)}{\pi D^2} \leq 0 \quad (5.4.5)$$

Seção retangular:

$$f(\mathbf{x}) \Rightarrow C_e = B H C_c + A_s(H) \gamma_s C_a + 2(B + H) C_f \quad (5.4.6)$$

$$g_1(\mathbf{x}) \Rightarrow \frac{A_s(H)}{B H} - 0,04 \leq 0 \quad (5.4.7)$$

$$g_2(\mathbf{x}) \Rightarrow 0,0015 - \frac{A_s(H)}{B H} \leq 0 \quad (5.4.8)$$

Onde:

$D \rightarrow$  Diâmetro da seção circular

$B \rightarrow$  Largura da seção retangular

$H \rightarrow$  Altura da seção retangular

$A_s(x) \rightarrow$  Área de aço em função da variável de projeto

Pode-se notar na função objetivo que as parcelas do custo referente ao concreto e fôrma são colocadas diretamente nesta função, ou seja, estão na forma explícita. Já a parcela do custo referente ao aço, está implícita na função objetivo. Neste caso,  $A_s$  depende da solução de um sistema não linear do tipo: dado diâmetro ou altura da seção (variável de projeto), encontre  $A_s$ , admitindo que carregamento permaneça constante ao longo do processo de otimização.

Foi utilizado o Método da Função Penalidade Exterior para otimizar as seções, quando as restrições são violadas entra o fator de penalização. Assim, as funções restrições são adicionadas na função objetivo, quando estão inativas seu valor é nulo e quando são violadas seu valor tende a infinito com a atuação do fator de penalização. Então, a função objetivo toma a seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}) = C_e + g_1 + g_2 \quad (5.4.9)$$

Onde:

$$\text{Se } g_n \leq 0$$

$$g_n = 0$$

$$\text{Se } g_n > 0$$

$$g_n \rightarrow \infty$$

$$(5.4.10)$$

A análise de sensibilidade foi realizada através do Método das Diferenças Finitas Centrais, a opção por este método dispensa o cálculo analítico dos gradientes, o que seria bastante trabalhoso para uma seção de concreto armado. Entretanto, como mencionado anteriormente, o custo computacional é alto e também exige calibração do fator de penalização para diferentes restrições de caixa e valores de carregamento.

## CAPÍTULO 6

### 6 RESULTADOS OBTIDOS

#### 6.1 DIMENSIONAMENTO A FLEXÃO

Os primeiros resultados obtidos são referentes à determinação da área de aço em uma seção de concreto armado submetida a esforços normais, sendo dado carregamento, geometria, dimensões,  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$  e arranjo da armadura. Este processo é conhecido como dimensionamento.

Para validar o dimensionamento da seção de concreto armado, foram comparados os resultados obtidos do código proposto, com os valores do programa nFOCCA desenvolvido no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), elaborado por MEDEIROS [2004] e disponibilizado pelo Prof. Dr. Flávio Mendes Neto em sua página da Internet.

O programa nFOCCA trabalha com seções poligonais, para dimensionamento das armaduras. O usuário define o carregamento (solicitações normais), as coordenadas dos vértices e das barras de aço da seção transversal e o programa retorna a área exata de aço e também a correspondente bitola comercial mais próxima para atender esta área. A seção circular foi aproximada para um polígono regular com 20 vértices, conforme sugestão do autor, nos exemplos apresentados no trabalho do autor MEDEIROS [2004], esta aproximação atingiu erros de até 13,01% em relação a referência utilizada pelo autor SANTOS [1981].

O procedimento de validação será verificar a área de aço para as seções circulares e retangulares nos seguintes casos:

1. Domínio 1;
2. Domínio 2;
3. Domínio 3;
4. Domínio 4;
5. Domínio 5;
6. Tração centrada;
7. Compressão centrada;
8. Flexão pura.

As Tabelas (6.1.1) e (6.1.2) apresentam os resultados para os exemplos utilizados na validação do código. As diferenças maiores ocorreram na seção circular, o que era esperado com a aproximação do programa nFOCCA de um círculo para um polígono. Ainda assim a diferença foi menor que o erro máximo apresentado pelo autor MEDEIROS [2004]. Outro motivo para a diferença é o fato de ter sido adotado o diagrama retangular de tensões do concreto (simplificação permitida pela norma) no código desenvolvido para este trabalho e o programa nFOCCA utiliza o diagrama parábola-retângulo.

A seção retangular apresentou bons resultados, com exceção do Domínio 4, a diferença foi inferior a 0,5%. Pode-se considerar que o código está validado com estes resultados, pois os valores de  $N_d$  e  $M_d$  representam os casos significativos para o dimensionamento das seções de concreto armado submetidas a solicitações normais.

Tabela 6.1.1 – Resultados da área de aço ( $A_s$ ) para seção circular

Seção circular com 10 barras longitudinais

Unidade => (cm)

fck = 20 MPa

γc = 1,4

fcd = 14,3 MPa

Aço CA 50

Casos:	Parâmetros	Nd	Md	As (cm²)		Diferença
		(kN)	(kN.m)	nFOCCA	Código	
1. Domínio 1		12000	250	288,70	289,44	0,3%
2. Domínio 2		4000	2750	250,00	258,08	3,1%
3. Domínio 3		-2000	2000	100,10	105,85	5,4%
4. Domínio 4		-6000	1500	59,07	64,816	8,9%
5. Domínio 5		-11000	500	72,04	78,135	7,8%
6. Tração centrada		11000	0	253,00	253,00	0,0%
7. Compressão centrada		-15000	0	133,80	130,067	-2,8%
8. Flexão pura		0	4000	274,40	290,92	5,7%

Tabela 6.1.2 – Resultados da área de aço ( $A_s$ ) para seção retangular

Seção retangular com 4 barras longitudinais

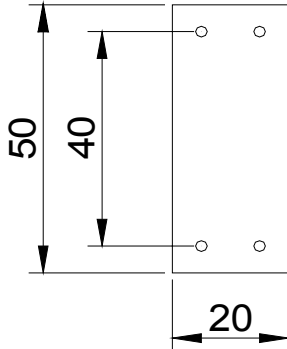
Unidade => (cm)

fck = 20 MPa

$\gamma_c$  = 1,4

fcd = 14,3 MPa

Aço CA 50



Casos:	Parâmetros	Nd	Md	As (cm²)		Diferença
		(kN)	(kN.m)	nFOCCA	Código	
1. Domínio 1		800	45	23,58	23,58	0,0%
2. Domínio 2		100	180	22,71	22,70	-0,1%
3. Domínio 3		-300	160	11,96	11,90	-0,5%
4. Domínio 4		-800	180	15,58	15,36	-1,4%
5. Domínio 5		-2000	55	24,53	24,40	-0,5%
6. Tração centrada		900	0	20,70	20,70	0,0%
7. Compressão centrada		-2150	0	22,28	22,28	0,0%
8. Flexão pura		0	90	10,05	10,02	-0,3%

A Figura (6.1.1) mostra graficamente o valor do resíduo **Res** ao longo do processo iterativo para determinação da área de aço, neste exemplo foi adotado o 4º caso para seção circular.

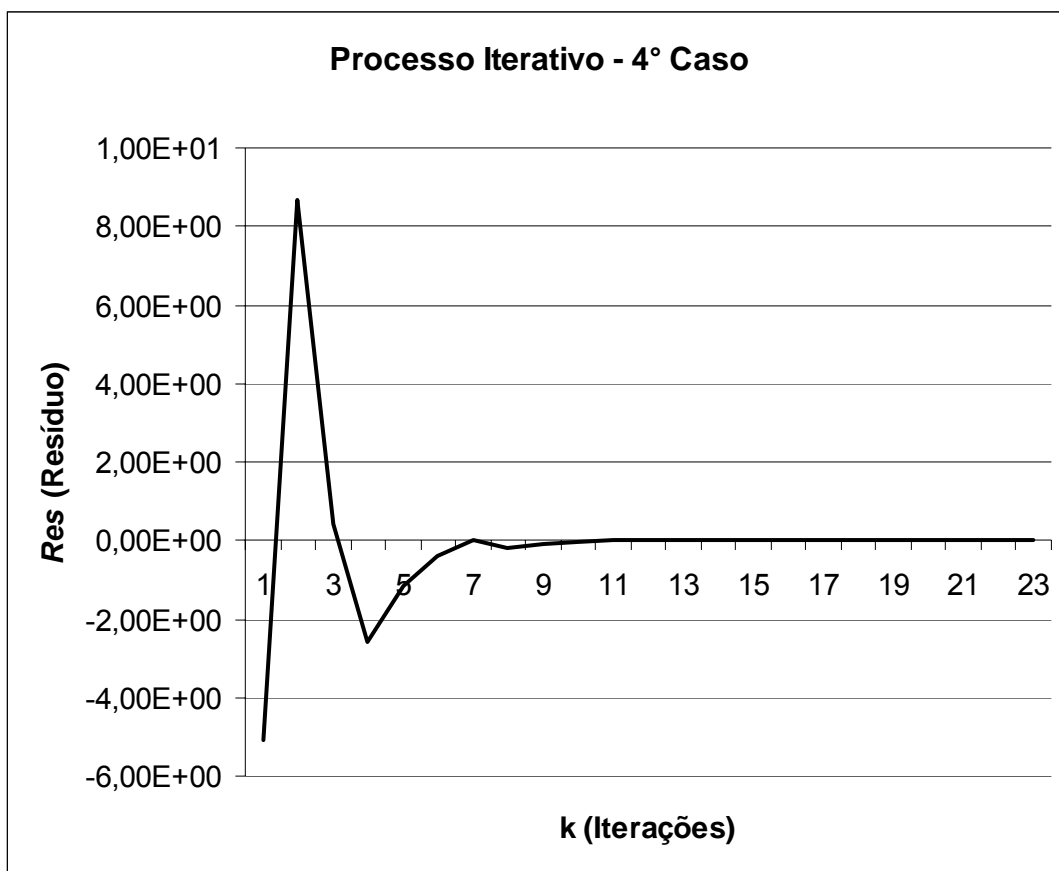


Figura 6.1.1 – Exemplo de processo iterativo para determinação de  $A_s$

## 6.2 OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE CONCRETO ARMADO

A otimização tem como função objetivo minimizar o custo da seção por unidade de comprimento, sendo a altura da seção a variável de projeto e a taxa geométrica da armadura  $\rho$  como restrição, além das restrições de caixa (máximos e mínimos). Os valores adotados para o custo dos materiais foram:

- Concreto => R\$ 350,00 / m<sup>3</sup>
- Aço => R\$ 3,85 / kg
- Fôrma => R\$ 15,00 / m<sup>2</sup>

O procedimento de validação dos resultados será verificar o custo (função objetivo) na vizinhança (valor arbitrário de  $\pm 1\%$ ) do valor encontrado para a altura da seção (variável de projeto), sendo que qualquer valor da variável de projeto diferente do encontrado pelo código deve ter o custo maior. Também será verificado se a restrição da taxa geométrica da armadura está ativa e dentro dos limites prescritos.

As Tabelas (6.2.1a, b e c) mostram os resultados para a seção otimizada e os valores na vizinhança que foram calculados diretamente sem a atuação do *solver* de otimização. O exemplo da Tabela (6.2.1a) demonstra que a seção otimizada atingiu o menor custo e as restrições não foram violadas.

No exemplo da Tabela (6.2.1b), a taxa geométrica da armadura  $\rho_{\max}$  foi reduzida para 1,2%, neste caso, a solução ótima encontrou uma altura da seção e custo maior que o exemplo anterior, porém com a taxa geométrica  $\rho$  exatamente no valor máximo, demonstrando que a restrição está ativa. O custo na vizinhança superior foi maior que na seção ótima, enquanto na vizinhança inferior o custo foi menor, mas a restrição foi violada.

A Tabela (6.2.1c) demonstra o resultado da otimização quando a altura da seção é limitada pela restrição da altura da viga.

Tabela 6.2.1 – Custo na seção circular ótima e em sua vizinhança

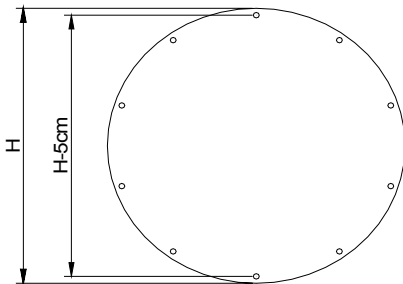
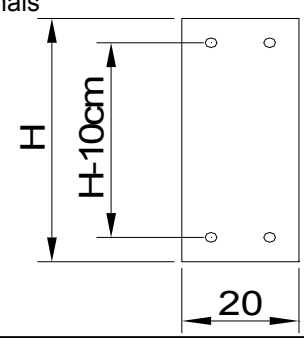
Seção circular com 10 barras longitudinais					
fck =	20 MPa				
$\gamma_c$ =	1,4				
fcd =	14,29 MPa				
Nd =	-120 kN				
Md =	2500 kN.m				
AÇO CA 50					
Hmín =	20 cm	$\rho_{\min}$ =	0,15%	(a)	
Hmáx =	200 cm	$\rho_{\max}$ =	4,00%		
Resultados	Hseção	As	$\rho$		Custo
Casos:	(cm)	(cm²)			(R\$/m)
Seção Otimizada	108,63	144,58	1,56%	812,576	
Vizinhança (+1%)	109,72113	142,61	1,51%	813,626	
Vizinhança (-1%)	107,54844	147,22	1,62%	813,568	
Hmín =	20 cm	$\rho_{\min}$ =	0,15%	(b)	
Hmáx =	200 cm	$\rho_{\max}$ =	1,20%		
Resultados	Hseção	As	$\rho$		Custo
Casos:	(cm)	(cm²)			(R\$/m)
Seção Otimizada	117,38	129,86	1,20%	826,560	
Vizinhança (+1%)	118,55730	128,08	1,16%	829,341	
*Vizinhança (-1%)	116,20963	131,69	1,24%	823,983	
*Restrição violada					
Hmín =	20 cm	$\rho_{\min}$ =	0,15%	(c)	
Hmáx =	100 cm	$\rho_{\max}$ =	4,00%		
Resultados	Hseção	As	$\rho$		Custo
Casos:	(cm)	(cm²)			(R\$/m)
Seção Otimizada	100,00	167,19	2,13%	827,297	
Vizinhança (-1%)	99,00	170,07	2,21%	830,070	

Tabela 6.2.2 – Custo na seção retangular ótima e em sua vizinhança

Seção retangular com 4 barras longitudinais				
$f_{ck} =$	20 MPa			
$\gamma_c =$	1,4			
$f_{cd} =$	14,29 MPa			
$N_d =$	-300 kN			
$M_d =$	160 kN.m			
$H_{mín} =$	20 cm	$\rho_{mín} =$	0,15%	
$H_{máx} =$	100 cm	$\rho_{máx} =$	4,00%	
Resultados	Hseção	As	$\rho$	Custo
Casos:	(cm)	(cm <sup>2</sup> )		(R\$/m)
Seção Otimizada	57,681	8,88	0,77%	90,508
Vizinhança (+1%)	58,2581	8,69	0,75%	90,514
Vizinhança (-1%)	57,1045	9,12	0,80%	90,667
$H_{mín} =$	20 cm	$\rho_{mín} =$	0,15%	
$H_{máx} =$	100 cm	$\rho_{máx} =$	0,70%	
Resultados	Hseção	As	$\rho$	Custo
Casos:	(cm)	(cm <sup>2</sup> )		(R\$/m)
Seção Otimizada	59,425	8,32	0,70%	90,569
Vizinhança (+1%)	60,0197	8,14	0,68%	90,617
*Vizinhança (-1%)	58,8311	8,50	0,72%	90,535
*Restrição violada				
$H_{mín} =$	20 cm	$\rho_{mín} =$	1,50%	
$H_{máx} =$	100 cm	$\rho_{máx} =$	4,00%	
Resultados	Hseção	As	$\rho$	Custo
Casos:	(cm)	(cm <sup>2</sup> )		(R\$/cm)
Seção Otimizada	46,224	13,87	1,50%	94,132
*Vizinhança (+1%)	46,6860	13,60	1,46%	93,803
Vizinhança (-1%)	45,7616	14,13	1,54%	94,480
*Restrição violada				

(a)

(b)

(c)

Os exemplos demonstram que a otimização foi eficiente em encontrar o menor custo dentro das restrições impostas no problema. O menor custo foi encontrado no exemplo da Tabela (6.2.1a) para a seção circular e no exemplo da Tabela (6.2.2a) para a seção retangular, onde as restrições proporcionam um domínio maior para a busca da solução ótima. Também o custo nas vizinhanças foi sempre maior que o custo encontrado na solução ótima.

Na prática, as variáveis de uma seção de concreto armado são discretas. Para concreto moldado *in loco*, as dimensões são geralmente múltiplas de 5 cm e utilizam-se bitolas comerciais para as armaduras. Entretanto, as variáveis contínuas obtidas com a otimização em um algoritmo matemático, podem ser aproximadas para o valor discreto mais próximo a favor da segurança.

### 6.3 LINHAS DE INFLUÊNCIA E ENVOLTÓRIAS DE ESFORÇOS

#### Viga bi-apoiada

A Figura (6.3.1) mostra uma viga bi-apoiada com dois balanços. Esta viga representa a longarina de uma ponte em concreto armado com seção transversal conforme Figura (6.3.3), também será considerado que neste projeto está previsto uma transversina em cada apoio, com rigidez suficiente para evitar a rotação das longarinas em torno do eixo longitudinal. Este exemplo pode ser facilmente solucionado manualmente e será utilizado para verificar os resultados gerados pelo código.

Nos projetos de pontes, devem-se avaliar todos os carregamentos possíveis de ocorrer, bem como suas combinações, durante a vida útil da estrutura. Neste trabalho será avaliado o momento fletor, atuante na viga principal (longarina), devido ao peso próprio da estrutura e a carga móvel.

A discretização da viga foi realizada com três elementos nos balanços e em dez elementos no tramo. A numeração dos nós da viga está indica na Figura (6.3.1). Como neste trabalho foram gerados apenas os elementos de viga 2D que para este exemplo são componentes da longarina, todos os nós da malha de elementos finitos estarão sujeitos à ação da carga móvel. Em casos onde outros componentes da estrutura de uma ponte são modelados na mesma malha de elementos finitos (por exemplo: os pilares), existirão outros nós da estrutura em que a carga móvel não será aplicada diretamente sobre eles.

Todas as seções da estrutura (ou nós na modelagem por elementos finitos) terão uma linha de influência (LI) para cada efeito elástico a ser avaliado (momento, cortante, torção, reações de apoio). A geração da LI será através de soluções por elementos finitos com uma carga unitária atuando em cada nó sujeito à aplicação da carga móvel. Neste exemplo foi considerado apenas o momento fletor. Também foi adotada a simplificação de seção constante para a viga. A Figura (6.3.2) apresenta a linha de influência referente ao momento fletor para a seção 9.

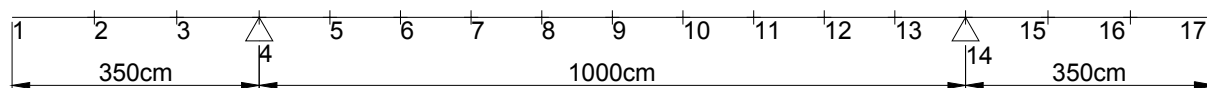


Figura 6.3.1 – Viga bi-apoiada com balanços





Figura 6.3.2 – Linha de influência do momento para a seção 9

Verificação da LI do momento para a seção 9:

Reação de apoio para carga unitária = 0,5

L.I. para momento máximo (+) na seção 9,  $LI_1 = 0,5 \cdot 500 = 250 \text{ cm}$

L.I. para momento (+) afastada  $\pm 150 \text{ cm}$  da seção 9,  $LI_2 = LI_3 = 350 \cdot 250 / 500 = 175 \text{ cm}$

L.I. para momento mínimo (-) na seção 1,  $LI_1 = -175 \text{ cm}$

L.I. para momento (+) afastada  $+150 \text{ cm}$  da seção 1,  $LI_2 = 200 \cdot (-175) / 350 = -100 \text{ cm}$

L.I. para momento (+) afastada  $+300 \text{ cm}$  da seção 1,  $LI_2 = 50 \cdot (-175) / 350 = -25 \text{ cm}$

Área de influência para momento (+),  $A_{\text{infl}}^+ = 1000 \cdot 250 / 2 = 125000 \text{ cm}^2$

Área de influência para momento (-),  $A_{\text{infl}}^- = 2 \cdot (350 \cdot 175) / 2 = -61250 \text{ cm}^2$

Definida a LI do momento fletor, será necessário determinar os carregamentos atuantes. Para este exemplo foi considerado o peso próprio, peso do pavimento e o trem-tipo referente à classe 45 da NBR 7188 [1987]. O peso próprio e peso do pavimento são considerados carregamentos permanentes enquanto a ação do trem-tipo é considerada variável sendo que esta diferenciação define os coeficientes para combinação das ações.

As propriedades geométricas da seção transversal da Figura (6.3.3) foram determinadas com o auxílio dos programas AutoCAD e nFOCCA:

Área da seção transversal,  $A = 32062,50 \text{ cm}^2$

Momento de inércia,  $I_{xx} = 39114322,9167 \text{ cm}^4$

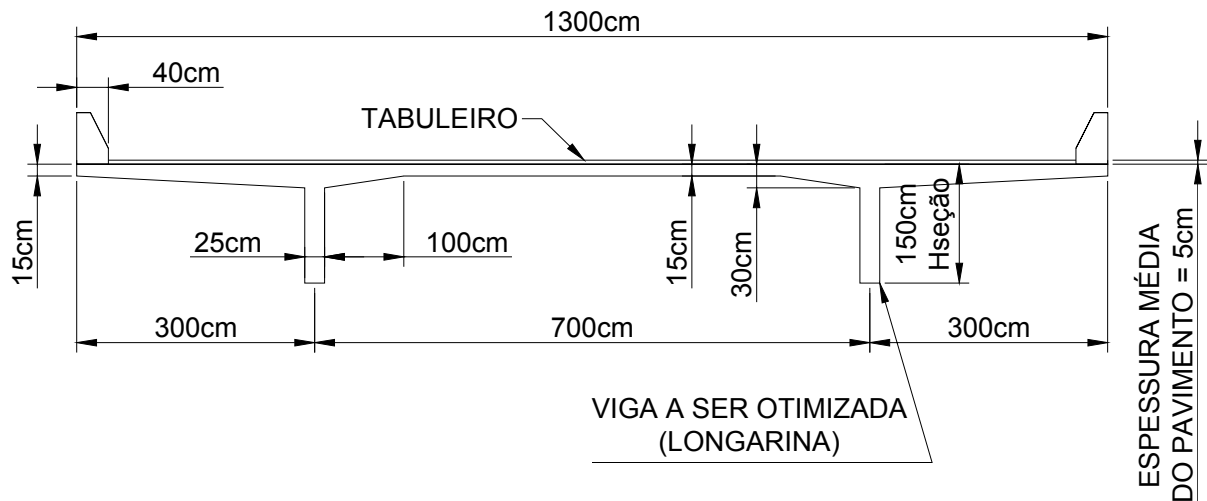


Figura 6.3.3 – Seção transversal da ponte

Carregamento distribuído devido ao peso de concreto,  $q_{\text{concreto}} = A \cdot \gamma_{\text{concreto}}$

$$q_{\text{concreto}} = 3,20625 \times 25 = 80,16 \text{ kN/m}$$

Carregamento distribuído devido ao peso do revestimento,  $q_{\text{revestimento}} = A \cdot \gamma_{\text{pavimento}}$

$$q_{\text{pavimento}} = (13,00 - 0,80) \times 0,05 \times 24 = 14,64 \text{ kN/m}$$

Carregamento distribuído total,  $q_{\text{total}} = q_{\text{concreto}} + q_{\text{revestimento}}$

$$q_{\text{total}} = 80,16 + 14,64 = 94,80 \text{ kN/m}$$

Como a seção transversal da ponte possui duas longarinas, o carregamento em cada longarina será:

$$q_{\text{longarina}} = q_{\text{total}} / 2 = 47,40 \text{ kN/m}$$

A carga móvel pode atuar em qualquer ponto do tabuleiro, tanto no sentido longitudinal como transversal e o seu posicionamento deve ser o mais desfavorável possível sendo desconsiderada a parcela do carregamento que provoca alívio da solicitação. Quando o carregamento atuar no sentido transversal tem-se um problema 3D. Como neste trabalho foi adotado modelo de viga 2D, a carga móvel deve ser transformada em um carregamento 1D equivalente. Para tanto, a seção transversal da ponte é aproximada também para uma viga 2D com seção constante, e as longarinas são consideradas como os apoios desta viga. Assim, determina-se a linha de influência para reações de apoio, conforme Figura (6.3.4a). Esta aproximação é válida quando as transversinas impedem a rotação das longarinas em torno do seu eixo longitudinal.

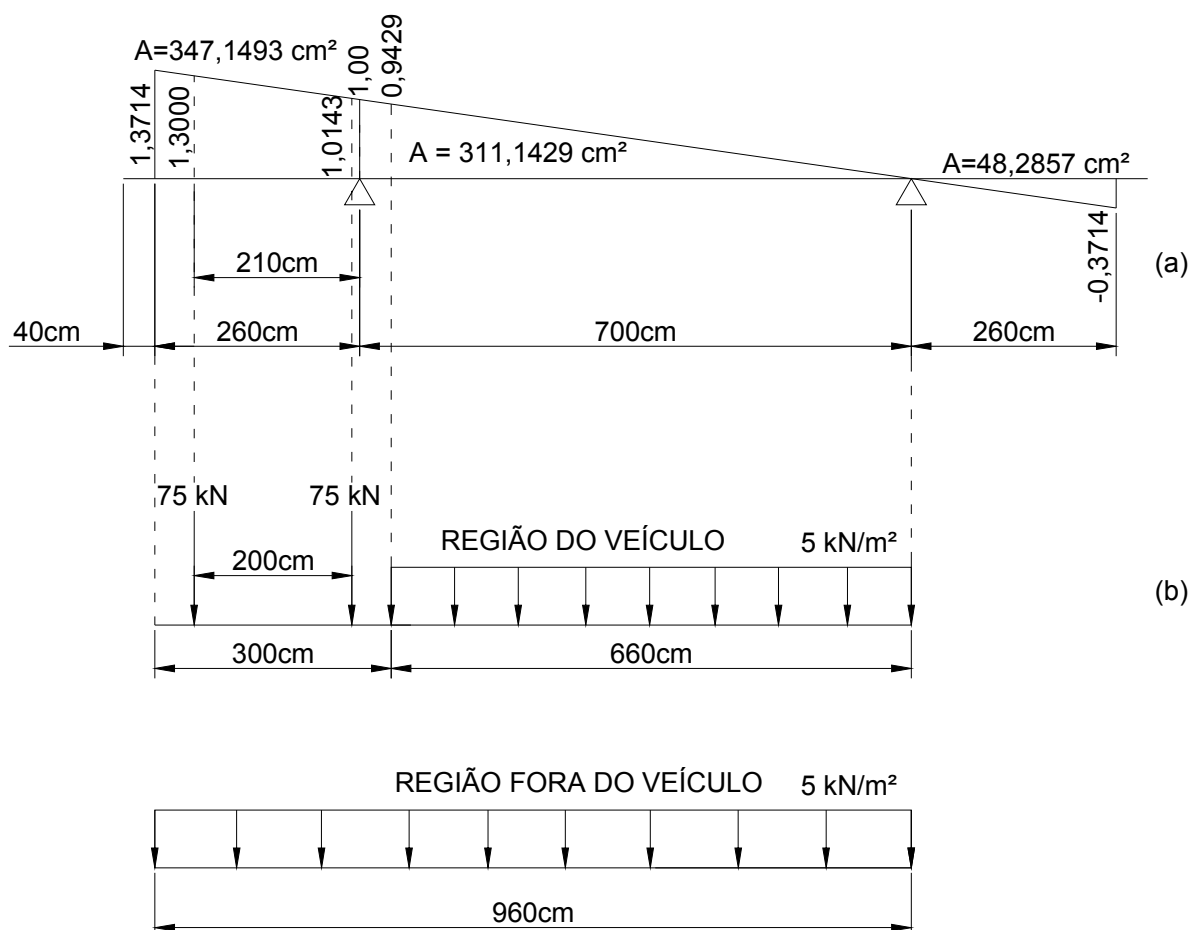


Figura 6.3.4 – Linha de influência para reação de apoio na seção transversal

O veículo-tipo será o posicionado conforme Figura (6.3.4b) a fim de obter os maiores valores para o carregamento a ser aplicado na viga 2D. Conforme prescrição da norma NBR 7188 [1984], a região da LI com valores negativos não será considerada, pois provocará redução nas solicitações positivas. Também, para este caso, não será necessário avaliar o carregamento negativo, porque seus valores são pequenos quando comparado com o peso próprio da viga. Assim, obtém-se o carregamento atuante na viga 2D conhecido como trem-tipo real, indicado na Figura (6.3.5a):

Região do veículo:

$$P = 75 \cdot (1,3000 + 1,0143) = 173,57 \text{ kN}$$

$$q = 5 \times 3,11 = 15,56 \text{ kN/m}$$

Região fora do veículo:

$$q = 5 \cdot (3,47 + 3,11) = 32,91 \text{ kN/m}$$

Existem dois carregamentos distribuídos na Figura (6.3.5a), um valor para a região do veículo e outra na região fora do veículo. A NBR 7188 [1984] permite que o carregamento distribuído seja homogeneizado, desde que não haja redução de solicitações. Para tanto, as

cargas concentradas dos veículos são subtraídas das parcelas correspondentes à homogeneização do carregamento distribuído, assim, o trem-tipo simplificado terá um único carregamento distribuído, conforme Figura (6.3.5b), e a carga concentrada P será:

$$P = 173,57 - 6 \cdot (32,91 - 15,56) / 3 = 138,86 \text{ kN}$$

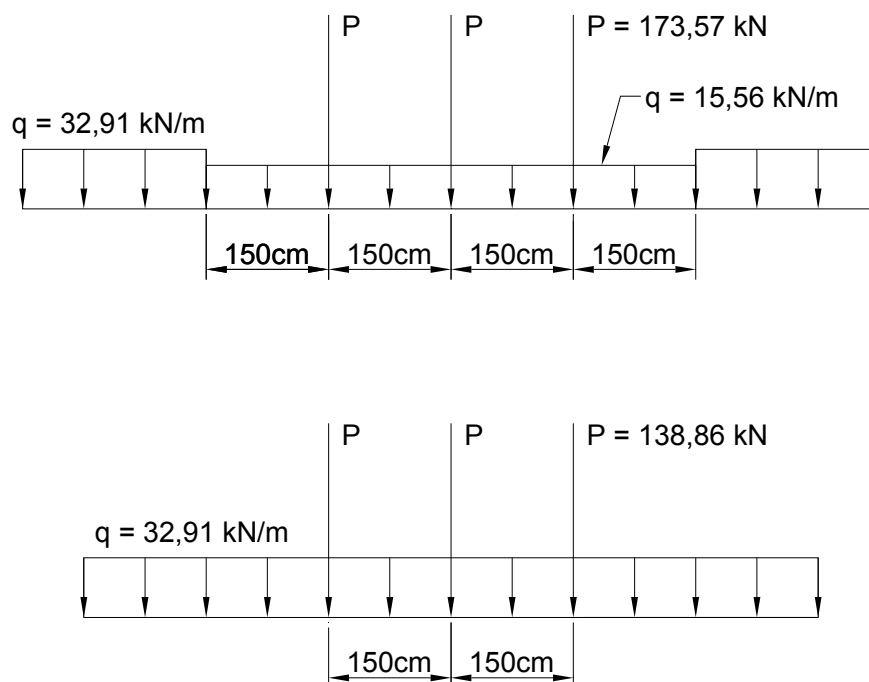


Figura 6.3.5 – Trem tipo real sem impacto

Para assimilar as cargas móveis, que produzem efeitos dinâmicos na estrutura, com as cargas estáticas determinadas pelo trem-tipo, utiliza-se um coeficiente de amplificação dinâmica denominado de coeficiente de impacto [NBR 7181, 1987]. Este coeficiente é em função do vão, entretanto, a norma permite adotar um único valor equivalente à média aritmética dos vão teóricos, caso o menor vão seja igual ou superior a 70% do maior. Para vigas em balanço, o vão teórico é tomado igual a duas vezes o seu comprimento. Assim, neste exemplo, o coeficiente de impacto terá um valor único para toda a estrutura e a Figura (6.3.6) mostra o trem-tipo com impacto, sendo este o carregamento móvel a ser aplicado na viga 2D.

$$\text{Média dos vãos} = (2 \times 3,5 + 10 + 2 \times 3,5) / 3 = 8,00 \text{ m}$$

$$\varphi = 1,4 - 0,007 \times 8 = 1,344$$

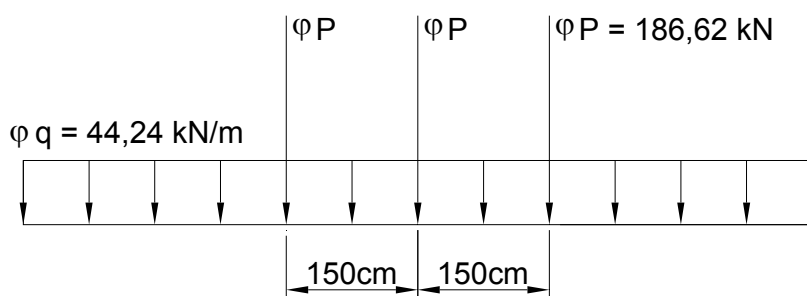


Figura 6.3.6 – Trem tipo real com impacto

Definidos todos os carregamentos e as linhas de influência, o próximo passo será determinar as solicitações atuantes na estrutura, conforme mencionado anteriormente, este exemplo considera apenas o momento fletor e esforço normal à seção. Assim, o momento fletor positivo em uma longarina devido à carga permanente será:

$$M_g = q_{\text{longarina}} \cdot (A_{\text{infl}}^+ + A_{\text{infl}}^-)$$

$$M_g = 47,40 \times (12,5 - 6,125)/2 = 302,1630 \text{ kN.m}$$

Para a carga móvel tem-se:

$$M_q^+ = \varphi \cdot q \cdot A_{\text{infl}}^+ + \varphi \cdot P(LI_1 + LI_2 + LI_3)$$

$$M_q^+ = 44,2368 \times 12,5 + 186,62 \times (2,5 + 1,75 + 1,75) = 1672,704 \text{ kN.m}$$

Para o momento negativo devido à carga móvel, também na seção 9, será:

$$M_q^- = \varphi \cdot q \cdot A_{\text{infl}}^- + \varphi \cdot P(LI_1 + LI_2 + LI_3)$$

$$M_q^- = 44,2368 \times (-6,125) + 186,62 \times (-1,75 - 1,00 - 0,25) = 830,8224 \text{ kN.m}$$

No dimensionamento, os esforços devem ser majorados por coeficientes obtendo assim as solicitações de cálculo, neste trabalho foram adotados os coeficientes de ponderação da NBR 6118 [2004] para ELU. A Figura (6.3.7) mostra os resultados encontrados pelo código para as envoltórias do momento fletor. Nos valores positivos a combinação de carregamentos foi:

$$\begin{aligned} \text{Combinação 1} \Rightarrow M_d^+ &= 1,4M_g + 1,4M_q \\ M_d^+ &= 2764,8139 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

Para os momentos negativos foi utilizado:

$$\begin{aligned} \text{Combinação 2} \Rightarrow M_d^- &= 1,0M_g + 1,4M_q \\ M_d^- &= -860,9883 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

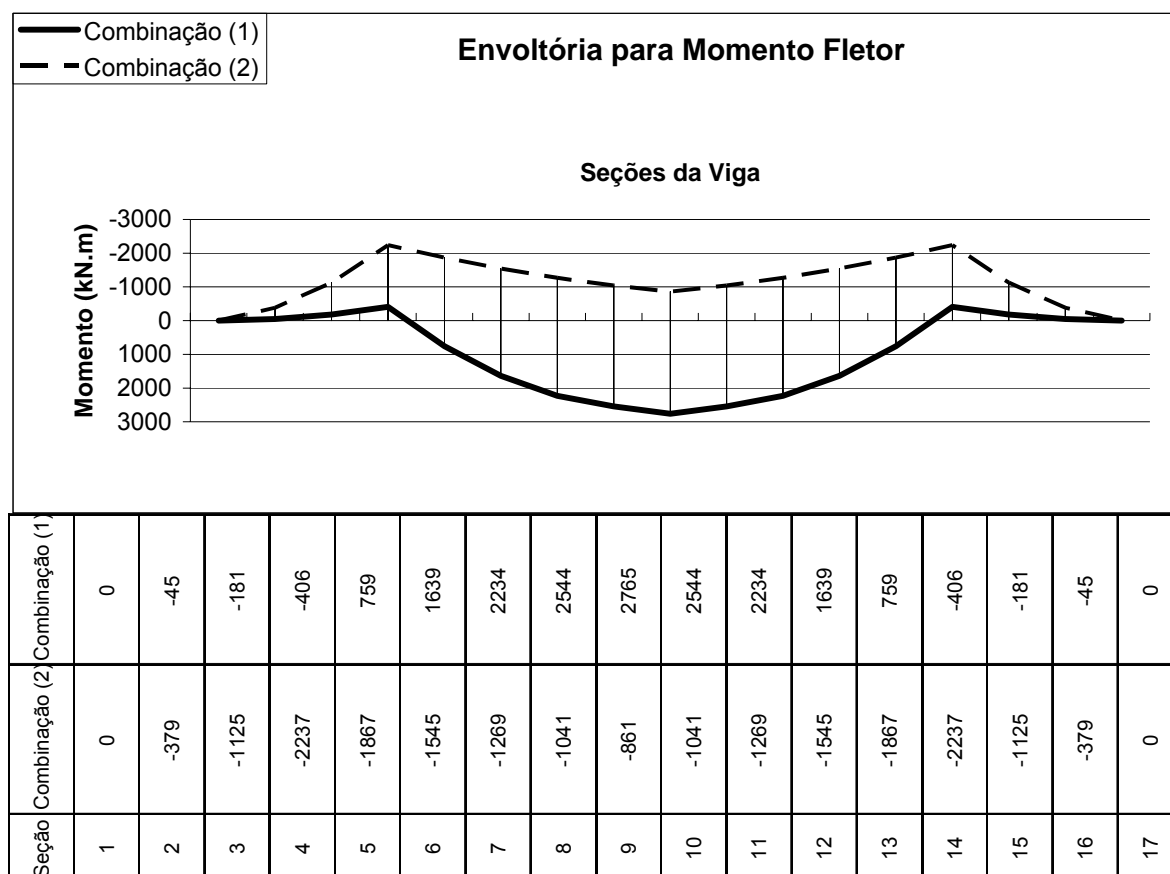


Figura 6.3.6 – Envoltória de momento fletor

Os resultados encontrados na solução por elementos finitos para a seção 9 foram de 2764,8082 kN.m para Combinação 1 e -860,9923 kN.m para a Combinação 2, conforme mostra Figura (6.3.6), estes valores apresentam erro de -0,0002% e 0,0005% respectivamente, o que pode ser considerado uma ótima precisão.

Para simplificação do problema, neste trabalho não será considerado o diagrama deslocado de momentos. Definidas as solicitações máximas e mínimas através da envoltória de momento fletor, parte-se para o dimensionamento da seção, neste trabalho foi adotada seção “T” nos momentos positivos e seção retangular nos momentos negativos. A variável de projeto a ser otimizada é a altura da seção e, para simplificar o problema, todas as outras variáveis como largura da seção, dimensões das mísulas na seção “T”,  $f_{ck}$  e arranjo das armaduras foi adotado valores constantes.

As armaduras devem ser arranjadas de tal forma a concentrar mais barras na região onde a tração é maior. Como a solicitação é de flexão, as armaduras devem ser posicionadas o mais afastado possível do centróide da seção transversal. No tramo da viga, onde ocorrem momentos positivos e negativos dependendo da combinação de carregamento, foi adotada a proporção de 2:1 entre a área de aço na face inferior e a face superior. Esta proporção foi adotada em função dos valores dos momentos no tramo da viga, a face inferior será tracionada nos momentos positivos, enquanto nos momentos

negativos a tração ocorrerá na face superior. Como os momentos positivos são maiores, em valores absolutos, que os momentos negativos, a maior concentração de armadura deverá ser na face inferior, conforme Figura (6.3.7).

As seções dos balanços e dos apoios estão sujeitas somente a momentos negativos, assim, a armadura será concentrada somente na face superior da seção, conforme Figura (6.3.8).

Determinação da largura de mesa colaborante para a seção “T”:

Distância  $a$ , entre pontos de momento fletor nulo será o menor valor entre:

Tramo em balanço  $a = 2 \times 350 = 700 \text{ cm}$

Tramo central  $a = 0,60 \times 1000 = 600 \text{ cm}$

Largura da mesa  $b_f = 0,10 \times a \times 2 + b_w = 0,10 \times 600 \times 2 + 25 = 145 \text{ cm}$

Com esta largura colaborante, a seção “T” para a viga deste exemplo terá as dimensões conforme Figura (6.3.7a).

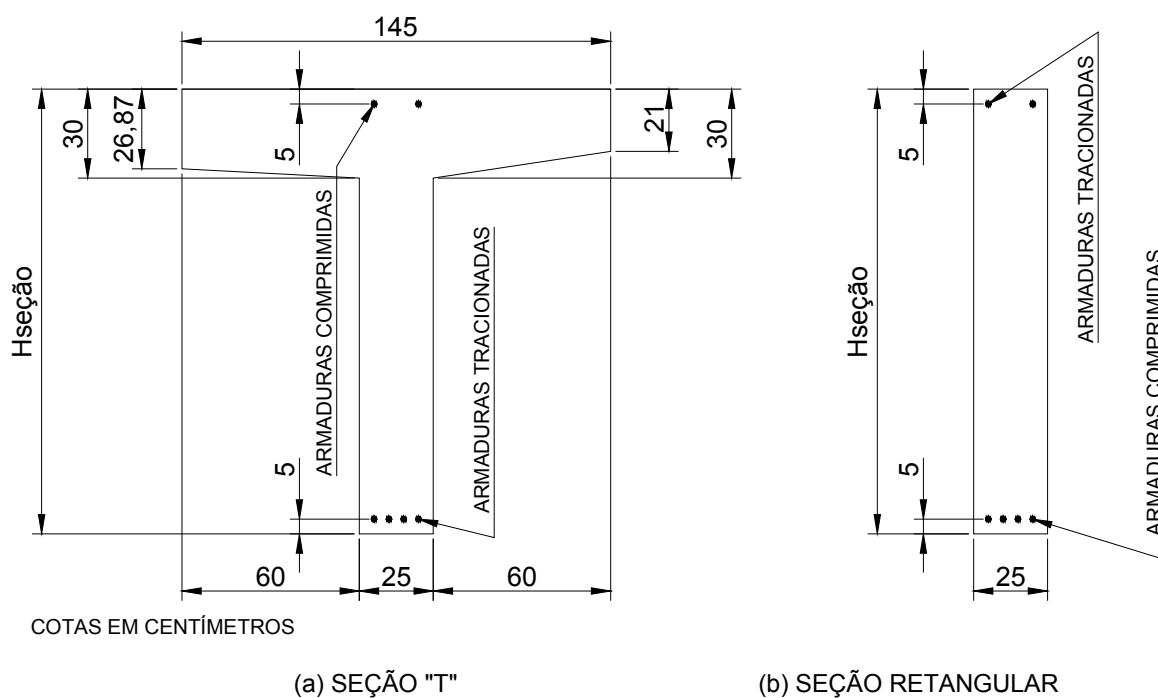


Figura 6.3.7 – Seções do tramo a serem otimizadas

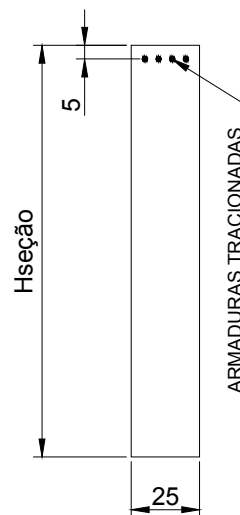


Figura 6.3.8 – Seções do balanço e apoio a serem otimizadas

A Figura (6.3.9) mostra a altura da viga em todas as seções. Neste exemplo, considerou-se precisão em décimos de milímetros. Entretanto, na prática corrente, é comum adotar dimensões múltiplas de 5 cm, mesmo sendo possível alcançar precisão de centímetros com as ferramentas disponíveis para execução deste tipo de estrutura. Esta configuração também poderia ser executada em estruturas pré-moldadas.

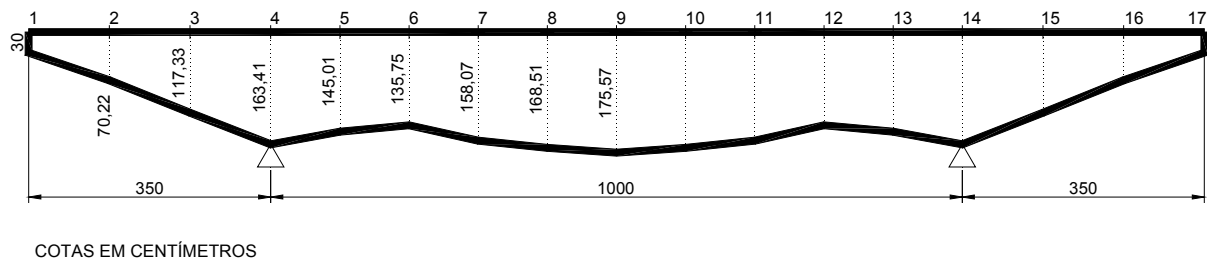


Figura 6.3.9 – Altura da viga otimizada

As armaduras foram detalhadas para as seções 9 e 4 conforme Figura (6.3.10).



COTAS EM CENTÍMETROS

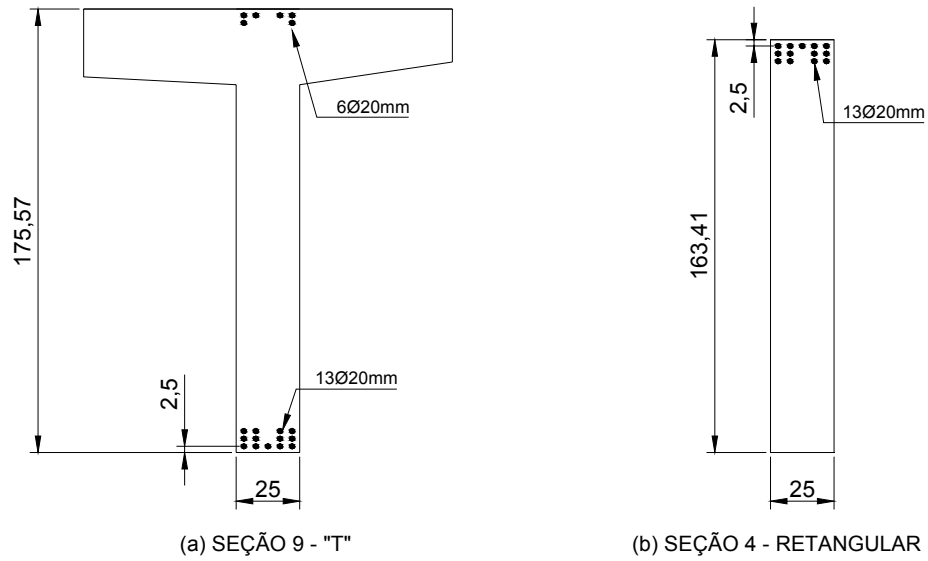


Figura 6.3.10 – Detalhamento da armadura

A Figura (6.3.11) apresenta os resultados completos encontrados para a altura, área de aço e o custo em todas as seções da viga. O custo de cada elemento da viga pode ser obtido através do produto do custo por unidade de comprimento, apresentado na Figura (6.3.11c), pelo comprimento do elemento e, conseqüentemente o custo total da viga será a soma destes produtos. Para o exemplo em estudo, o custo total da viga foi de **R\$ 6980,97**.

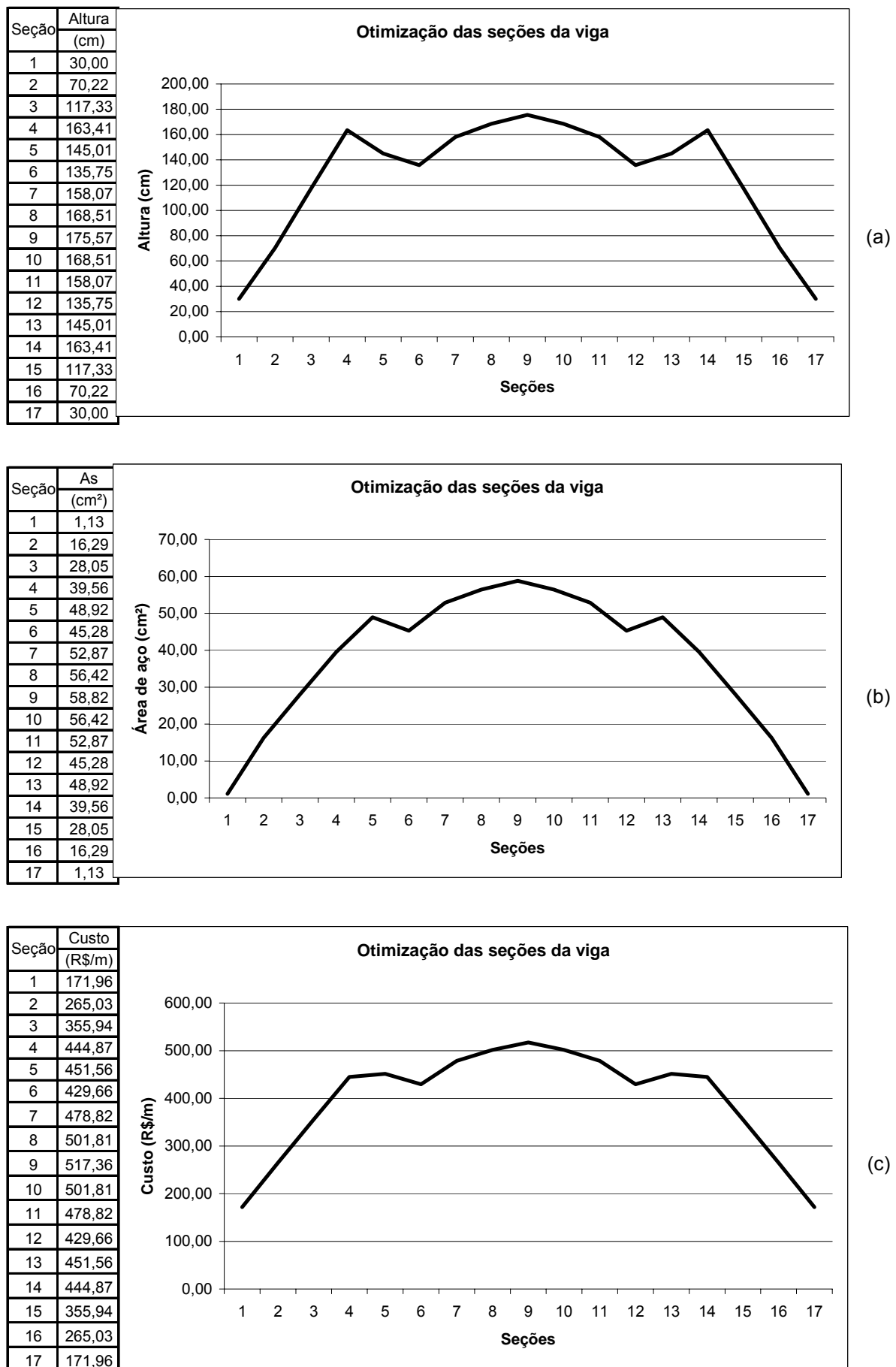


Figura 6.3.11 – Resultados para viga otimizada

## CAPÍTULO 7

### 7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E TÉCNICAS EMPREGADAS

Os resultados encontrados no dimensionamento da seção de concreto armado para as diversas condições de carregamento, mostram a eficiência do código computacional desenvolvido neste trabalho. O problema foi abordado de maneira sistemática, baseado no equilíbrio dos esforços resistentes com os esforços solicitantes atuantes na seção. Este procedimento apresenta vantagens em relação à abordagem tradicional da bibliográfica, quando incorporado o algoritmo matemático de otimização.

Durante a busca de linha, o dimensionamento é disparado varias vezes no processo de otimização, para calcular os gradientes pelo Método das Diferenças Finitas Centrais. Em alguns casos, o problema se mostrou instável, com variações do erro na ordem de  $10^2$  a cada iteração. Este problema foi corrigido com a calibração do parâmetro de penalização, alteração do passo de busca, redução da caixa e alteração do ponto inicial.

O código desenvolvido para dimensionamento e otimização da seção de concreto já está em uso prático nos projetos de fundação em tubulão para torres e postes metálicos. Intuitivamente acredita-se que o menor custo corresponderá à solução com o menor volume de concreto, ou conforme citam as bibliografias: sempre que possível deve-se dimensionar a seção no domínio 3 onde o concreto e o aço trabalham na tensão máxima. Entretanto, estas considerações não levam em conta o custo real em valores monetários, que pode ocorrer em função da distância da obra, dificuldade de acesso ou outro problema qualquer no qual o custo do aço ou da fôrma seja predominante. Assim, a formulação proposta do custo sendo equacionado em valores monetários composto pelo volume de concreto, peso de aço e área de fôrma e solucionado através do *solver* de otimização, certamente apresentará melhores resultados para obter o projeto ótimo.

Os postes de telecomunicação produzem momentos elevados na fundação. No caso de tubulão, quanto menor o diâmetro do fuste, maior será o consumo de aço, por outro lado se aumentar o diâmetro do fuste para reduzir o consumo de aço, o volume de concreto e escavação (pode ser extrapolado para obter o custo da fôrma) também aumentará. O código de otimização auxilia no projeto, fornecendo o diâmetro do fuste para o custo ótimo da seção simplesmente com a entrada de dados, dispensando várias tentativas tediosas.

Uma das sugestões para trabalhos futuros, é a extensão do código para solucionar flexão oblíqua e esforços tangencias como cisalhamento e torção. Outra sugestão um pouco mais complexa seria calcular analiticamente os gradientes da equação de equilíbrio dos esforços solicitantes e resistentes. A derivada analítica reduz substancialmente o custo computacional no processo de otimização. Também a formulação do problema de

otimização poderá ser melhorada assumindo outras variáveis de projeto como: todas as dimensões da seção,  $f_{ck}$  e distribuição da armadura.

A motivação do trabalho foi à aplicação no projeto de pontes, assim, foi desenvolvido um algoritmo que gera linhas de influência, por elementos finitos, para vigas contínuas com qualquer número de tramos. O algoritmo também gera o trem-tipo e a envoltória de momentos com duas combinações de carregamento. Na sequência, o *solver* de otimização atua em todas as seções da viga retornando a altura ótima para a viga “T” nos momentos positivos e para viga de seção retangular nos momentos negativos.

Como sugestão para trabalhos futuros, a estrutura pode ser modelada com uma malha 3D de elementos finitos, a modelagem das vigas pode ser realizada com elementos de viga 3D integrados as placas com *off set* ou até mesmo com elementos de placa ou casca. Outra alternativa seria modelar a viga também com elemento de placa ou casca, não sendo necessário utilizar *off set*. Nestes casos, deve-se utilizar superfícies de influência para determinar como a carga móvel será aplicada. Assim, será necessário calcular a base de efeitos elásticos por integração numérica.

A formulação de um problema de otimização requer definição do objetivo a ser alcançado e das restrições impostas e, tanto o objetivo quanto as restrições devem estar “matematicamente bem definidas”. Existem várias restrições a serem consideradas nas estruturas de concreto armado que tradicionalmente são verificadas pelos critérios de ELU (resistência, fadiga, ancoragem nos apoios) e ELS (fissuração, deformação, vibrações, durabilidade), além das restrições executivas como detalhamento da armadura, confecção de fôrmas, escoramento.

Apesar de importantes, este trabalho não considerou os efeitos de cisalhamento, torção, deformação da viga e vibrações. A principal dificuldade encontrada foi equacionar todos estas restrições em função das variáveis de projeto. Entretanto, estas dificuldades não são impeditivas para a otimização, ainda que parcial. Novas restrições podem e devem ser empregadas em trabalhos futuros, contribuindo para o aprimoramento constante na área de concreto armado.

Com a otimização da viga, as dimensões podem ser alteradas e conseqüentemente ocorrerá alteração na área e inércia da viga, além de alterar o carregamento devido ao peso próprio. Assim, o algoritmo deve alterar os dados de entrada e refazer todo o processo até atingir a convergência, este processo iterativo não foi implementado neste trabalho. O fluxograma da Figura (7.1) apresenta uma sugestão para otimizar todos os componentes estruturais que envolvem uma ponte, desde o tabuleiro até a fundação.

Os procedimentos utilizados neste trabalho são viáveis para problemas com poucas variáveis, pois a análise de sensibilidade por Diferenças Finitas é computacionalmente cara e, para cada caso, faz-se necessária calibração por parte do usuário de alguns parâmetros de otimização. Nos casos de problemas com muitas variáveis, seria interessante calcular os

gradientes analiticamente e utilizar um método que não exija muitos processos de calibração, como por exemplo, o Método do Lagrangeano Aumentado.

O esforço computacional foi significativo, mesmo com todas as simplificações do problema: análise restrita a flexão de viga 2D, otimização com uma variável de projeto por seção transversal e esforços constantes ao longo da análise. Um computador com a configuração *Pentium IV, 1,6MHz, 1024 MB de Ram*, demorou cerca de três minutos para otimizar a viga utilizada como exemplo no Capítulo 6.

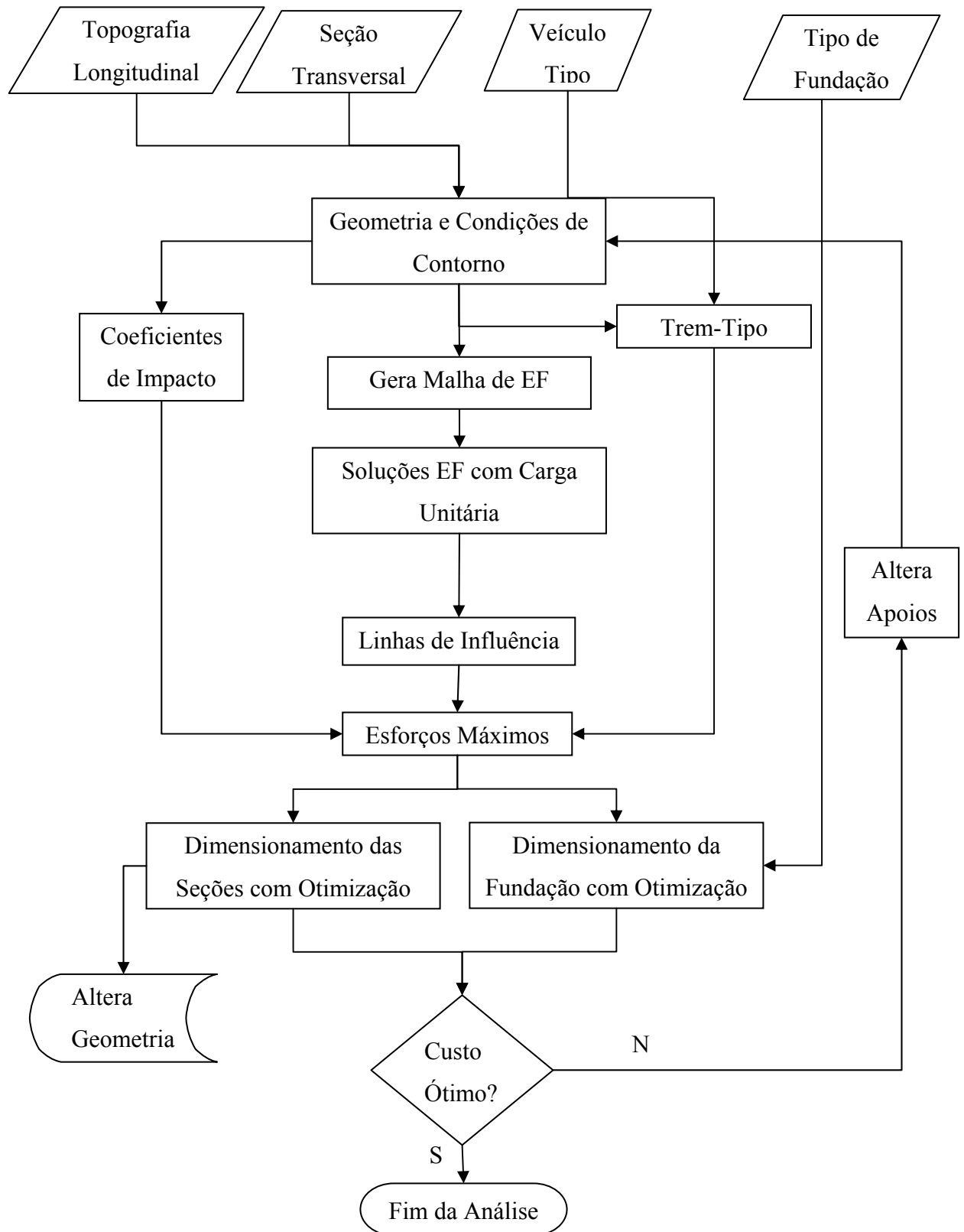


Figura 7.1 – Fluxograma geral para otimização da estrutura de uma ponte

## CAPÍTULO 8

### 8 CONCLUSÕES

A principal contribuição deste trabalho foi demonstrar a viabilidade de utilizar *softwares* desenvolvidos nos laboratórios acadêmicos, em problemas reais de engenharia. O código computacional aberto permite customizar os algoritmos para obter melhores resultados em desempenho e confiabilidade.

Neste trabalho, todos os códigos são abertos, o que possibilita aperfeiçoamento constante sem depender de atualizações externas. Também seria possível a integração com *softwares* comerciais, desde que tenha a formatação de entrada e saída de dados.

O fato de não comprar as licenças dos *softwares* comerciais, não significa necessariamente uma vantagem financeira. O tempo de desenvolvimento ou mesmo adaptação de um código aberto também pode ter custo elevado, especialmente para o profissional que não utiliza programação em sua rotina de trabalho.

É de fundamental importância documentar os algoritmos, seja através de comentários feitos diretamente no código, diagramas de classes ou textos teóricos. Uma semana sem atividade de programação pode ser tempo suficiente para o programador esquecer alguns conceitos ou lógica utilizada no código, comprometendo o tempo de desenvolvimento para relembrar o que já foi elaborado.

A otimização é, sem dúvida, uma poderosa ferramenta para desenvolvimento dos projetos de engenharia. Entretanto, a avaliação dos resultados dentro do contexto da engenharia é vital para chegar de fato ao projeto ótimo, principalmente quando os procedimentos exigirem calibração. Neste trabalho, foram utilizados algoritmos matemáticos para minimização da função objetivo onde o ponto de mínimo é determinado pelas condições de otimalidade, ou seja, é um processo determinístico. Entretanto, podem existir mínimos locais, sendo necessário iniciar o processo de otimização por pontos diferentes para confiabilidade dos resultados.

O desempenho do código de otimização está diretamente relacionado com a análise de sensibilidade. O Método das Diferenças Finitas Centrais tem a vantagem de ser bastante flexível, inclusive pode ser usado para interagir com *softwares* comerciais, entretanto, o custo computacional é alto. No dimensionamento da seção transversal de concreto armado, que é um problema iterativo, bastaria uma precisão de  $10^{-2}$  para resultados práticos de engenharia. Entretanto, neste trabalho foi necessário adotar precisão de  $10^{-6}$  em função da análise de sensibilidade por Diferenças Finitas, que deve ser suficientemente precisa para evitar instabilidade durante o processo de otimização.

Certamente seria vantajoso calcular os gradientes por métodos analíticos nas seções de concreto armado, mas isto vai exigir considerável esforço matemático para encontrar os gradientes de um problema não linear.

Outro aspecto importante nos projetos de engenharia é a customização dos *softwares* de CAD. Este tema não foi abordado neste trabalho, mas conhecida a formatação de entrada e saída de dados do programa CAD, o desenvolvimento de códigos adequados permite esta integração.

Engenharia aeronáutica, civil, mecânica ou qualquer outra ciência baseada na mecânica do contínuo, pode ser tratada de maneira equivalente. A abordagem sistemática da análise estrutural e dos processos de otimização, a formulação matemática dos problemas físicos e a capacidade de desenvolver algoritmos integrando todos os processos necessários em um projeto, proporcionam grande vantagem competitiva para empresas e profissionais que investem em ciência e tecnologia.



**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. ALBIERO, C., CINTRA, J., DÉCOURT, L. – **Fundações: Teoria e Prática**, Editora Pini Ltda, São Paulo, 1998.
2. ALVES, Marcelo K. – **Otimização**, Notas de aula, Florianópolis, 2003.
3. ALVES, Marcelo K. – **Elementos Finitos**, Notas de aula, Florianópolis, 2003.
4. ARORA, J. S. – **Introduction to Optimum Design**, MacGraw-Hill, New York 1989.
5. BASTOS, E. A. – **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua**, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.
6. BELEGUNDU, A. D., CHANDRUPATLA, T.R. – **Introduction to Finite Element in Engineering**, Prentice-Hall, Inc. 1991.
7. BERTSEKAS, D. P. – **Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method**, Academic Press, 1982.
8. COOK, Robert D., MALKUS, David S., PLESHA, Michael E. – **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, Inc. 1989.
9. FUSCO, Péricles Brasiliense – **Estruturas de Concreto**, Editora Guanabara dois S.A., Rio de Janeiro, 1981.
10. GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H. – **Practical Optimization**, Academic Press, New York 1981.
11. HAFTKA, R. T., KAMAT, M.P. – **Element of Structural Optimization**, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
12. HAUG, E.J., CHOI, K. K., KOMKOV, V. – **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, Academic Press, Orlando 1984.
13. HUGHES, Thomas J. - **The Finite Element Method**, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

14. KIKUCHI, N., HORIMATSU, K. – **Advances in Design Optimization**, Chapman & Hall, London 1994.
15. KWON, Y. W., BANG H. – **The Finite Element Method Using MATLAB**, CRC Pres, 1997.
16. MALVERN, Lawrence E. – **Introduction to the Mechanics of a Continious Medium**, Prentice-Hall, 1969.
17. MASON, Jayme – **Pontes em Concreto Armado e Protendido**, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1977.
18. MEDEIROS, G. A. – **Programa para análise e Dimensionamento da Área de Armadura de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Oblíqua**, 2004.61f, Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos 2004.
19. NBR 6118 – **PROJETO E EXECUÇÃO DE OBRAS DE CONCRETO ARMADO**, ABNT, 2003.
20. NBR 6123 – **FORÇAS DEVIDAS AO VENTO EM EDIFICAÇÕES**, ABNT, 1988.
21. NBR 7187 – **PROJETO E EXECUÇÃO DE PONTES DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO**, ABNT, 1987.
22. NBR 7188 – **CARGA MÓVEL EM PONTE RODOVIÁRIA E PASSARELA DE PEDESTRE**, ABNT, 1984.
23. SAITOU, K., IZUII, K., NISHIWAKI, S., PAPALAMBROS, P. - **A Survey Estrutural Optimization in Mechanical Product Development**, Journal of Computing and Information Science in Engineerring, Michigan, 2005.
24. SANTOS, Lauro Modesto dos. – **Cálculo de Concreto Armado**, Editora LMS Ltda., São Paulo, 1983.
25. SÜSSEKIND, José Carlos. – **Curso de Análise Estrutural**, Editora Globo S.A., São Paulo, 1991.

26. SÜSSEKIND, José Carlos. – **Curso de Concreto**, Vol. II, Editora Globo S.A., Rio de Janeiro, 1987.
27. VANDERPLAATS, G. N. – **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications**, MacGraw-Hill, 1984.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE 1

### RESULTANTE DO CONCRETO PARA SEÇÃO CIRCULAR

Será adotado diagrama retangular de tensões, simplificação permitida pela NRB 6118 [2004] na qual os resultados são suficientemente precisos quando comparados com o diagrama parábola-retângulo. Se fosse utilizado o diagrama parábola-retângulo seria necessário calcular a resultante do concreto através de integral numérica.

A Figura (A.1) mostra uma seção circular com a região comprimida indicada pelo trecho da hachura.

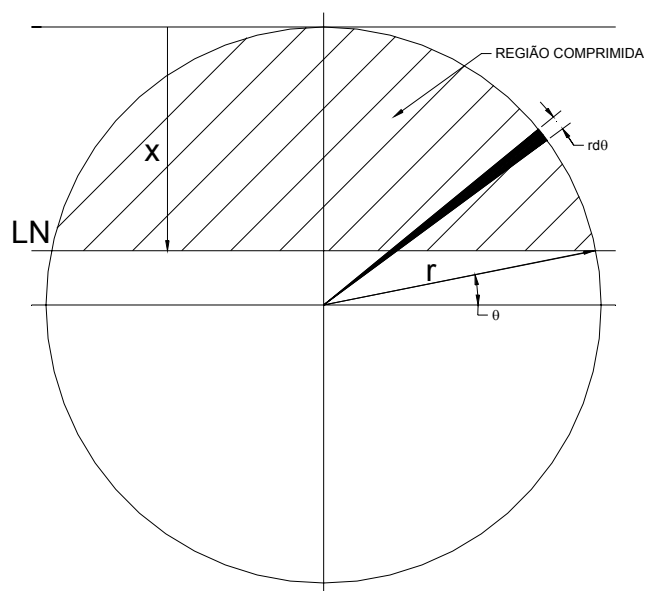


Figura A.1 – Seção circular de concreto armado

O ângulo  $\theta$  será:

$$\theta = \arcsen\left(\frac{r - 0,8x}{r}\right)$$

Para a dedução das equações será considerado  $\frac{1}{4}$  do círculo.

Área do setor circular ( $A_{sc}$ )

$$dA_{sc} = \frac{r^2 d\theta}{2} \quad A_{sc} = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

## Área do triângulo

$$A_{triangulo} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{2} = \frac{r^2 \sin(2\theta)}{4}$$

Portanto a área da região comprimida para  $\frac{1}{4}$  do círculo é:

$$A_{1/4circulo} = A_{sc} - A_{triangulo} \quad A_{1/4circulo} = \frac{r^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]$$

Logo, para toda a região comprimida,

$$A_{cc} = r^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]$$

E a resultante do concreto:

$$R_c = r^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] \sigma_c$$

Para seção circular a tensão do concreto será  $\sigma_c = 0,80 f_{cd}$ :

$$R_c = r^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right] 0,80 f_{cd}$$

Centróide do setor circular

$$y_{sc} A_{sc} = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} r \sin \theta \frac{1}{2} r^2 d\theta = -\frac{r^3}{3} \cos \theta \Big|_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3} \cos \theta$$

$$y_{sc} \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{r^3}{3} \cos \theta$$

$$y_{sc} = \frac{\frac{2}{3} r \cos \theta}{\left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)}$$

Centróide do triângulo

$$y_{triangulo} = \frac{2}{3} r \sin \theta$$

Portanto o centróide da região comprimida será:

$$A_{cc}y_{cc} = A_{sc}y_{sc} - A_{triângulo}y_{triângulo}$$

$$r^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right] y_{cc} = 2 \left[ \frac{r^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \left[ \frac{\frac{2}{3} r \cos \theta}{\left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)} \right] - 2 \left[ \frac{r^2 \text{sen}(2\theta)}{4} \right] \left[ \frac{2}{3} r \text{sen} \theta \right]$$

$$y_{cc} = \frac{\frac{r}{3} [2 \cos \theta - \text{sen}(2\theta) \text{sen} \theta]}{\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}}$$